# MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

3000

UNIVERSITY OF HAWAII LIBRARY

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE, TÜBINGEN
K. KNOPP, TÜBINGEN
R. NEVANLINNA, HELSINKI
E. SCHMIDT, BERLIN
F. K. SCHMIDT, HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT, TÜBINGEN

UNIVERSITY OF HAWAII LIBRARY

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR A. E. INGHAM
H. KNESER W. MAGNUS O. PERRON
W. SÜSS H. WEYL

61. BAND 1. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 13. NOVEMBER 1954)

QA1
M88
v.61
no.1

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1954

Math. Z.

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

---

Die Zeitschrift erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechselungen ausgesetzte Zeichen, z. B. die Landauschen Symbole $o$ und $O$, sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

**E. Kamke**, Tübingen, Frischlinstraße 27,
**K. Knopp**, Tübingen, Am Apfelberg 6,
**R. Nevanlinna**, Helsinki (Finnland), Mäntytie 5 B,
**E. Schmidt**, Berlin-Steglitz, Sedanstraße 8,
**F. K. Schmidt**, Heidelberg, Mathematisches Institut
**H. Wielandt**, Tübingen, Biesingerstraße 7.

**Springer-Verlag OHG** — Berlin W 35, Reichpietschufer 20. — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 24. — Göttingen, Weender Straße 60.

---

**Vertriebsvertretung des Verlages im Ausland:**

Lange, Maxwell & Springer Ltd., 242 Marylebone Road, London N.W. 1.

---

61. Band **Inhalt** 1. Heft

Seite

Klingenberg, W., Euklidische Ebenen mit Nachbarelementen . . . . . 1
Hellwig, G., Über partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung von gemischtem Typus . . . . . 26
Neumer, W., Zur Konstruktion von Ordnungszahlen. IV . . . . . 47
Gupta, H. C., An operational relation . . . . . 70
Pati, T., A Tauberian theorem for absolute summability . . . . . 75
Siddiqi, J. A., On a theorem of Fejér . . . . . 79
Weier, J., Die Homotopieinvarianz der algebraischen Fixpunktzahl . . . . . 82
Huppert, B., und N. Itô, Über die Auflösbarkeit faktorisierbarer Gruppen. II. . . 94
Laugwitz, D., Differentialgeometrie ohne Dimensionsaxiom. I. Tensoren auf lokallinearen Räumen . . . . . 100

66-46685

KLINGENBERG, W.
Math. Zeitschr. Bd. 61, S. 1—25 (1954)

5856-46
QA1
M88
v61

# Euklidische Ebenen mit Nachbarelementen.

Von
WILHELM KLINGENBERG.

J. HJELMSLEV[1]) hat in einer Reihe von Abhandlungen ein Axiomensystem für eine Ebene von euklidischem Typus untersucht, in dem nicht die Eindeutigkeit der Verbindungsgeraden zweier verschiedener Punkte und, was damit gleichbedeutend ist, nicht die Eindeutigkeit des Schnittpunktes zweier verschiedener Geraden gefordert wird. Auf eine solche Fragestellung wurde er durch den Versuch geführt, eine „natürliche" Geometrie zu begründen — „natürlich" in dem Sinne, daß sich in der Geometrie die Eigenschaften einer Zeichenebene wiederfinden sollen, zu denen insbesondere das Auftreten von „schleifenden Schnitten" und von Schnittpunkten außerhalb der Zeichenebene gehören[2]).

J. HJELMSLEV formuliert sein Axiomensystem für eine Ebene ohne die in Rede stehenden Eindeutigkeitsforderungen im Rahmen der von ihm begründeten Spiegelungsgeometrie; wir gehen auf diesen Begriff noch genauer ein. Er untersucht die mannigfachen interessanten Folgerungen aus seinen Annahmen. Wenn man jedoch als das Hauptproblem der axiomatischen Methode in der Geometrie die Frage nach dem kennzeichnenden Koordinatenbereich ansieht, das ist der Koordinatenbereich, mit dessen Hilfe man jede durch das Axiomensystem definierte Ebene beschreiben kann, dann bleiben bei den Untersuchungen von J. HJELMSLEV einige Fragen offen. HJELMSLEV zeigt zwar, daß die analytische Geometrie über gewissen Ringen, die Verallgemeinerungen der dualen Zahlen sind, seinen Axiomen genügt; er untersucht aber nicht, ob sich jede seiner axiomatisch definierten Ebenen so beschreiben läßt, und dieses ist auch nicht richtig, wie aus unseren Untersuchungen hervorgehen wird.

In der vorliegenden Arbeit wird nun ein im Rahmen der Spiegelungsgeometrie formuliertes Axiomensystem zugrunde gelegt, das jedenfalls in der von HJELMSLEV definierten Ebene gültig ist. Gleichfalls umfaßt unser Axiomensystem eines, das F. BACHMANN[3]) zur Begründung der euklidischen Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff angegeben hat. Die von F. BACHMANN axiomatisch charakterisierten euklidischen Ebenen lassen sich folgendermaßen

[1]) HJELMSLEV, J.: Einleitung in die allgemeine Kongruenzlehre. 1. Mitt. Danske Vid. Selsk., mat.-fys. Medd. **8** (1929); 2. Mitt. **10** (1929); 3. Mitt. **19** (1942); 4. u. 5. Mitt. **22** (1945); 6. Mitt. **25** (1949).

[2]) Siehe HJELMSLEV, J.: Die natürliche Geometrie. Leipzig 1923.

[3]) BACHMANN, F.: Grundlagen der Geometrie, Vorlesungsausarbeitung, Kiel 1951. Siehe auch: F. BACHMANN, Geometrien mit euklidischer Metrik, in denen es zu jeder Geraden durch einen nicht auf ihr liegenden Punkt mehrere Nichtschneidende gibt, Teil I und II in Math. Z. **51**, 752 u. 769 (1949), Teil III in Math. Nachr. **1**, 258 (1949).

beschreiben: Der Koordinatenbereich ist ein Körper $\boldsymbol{K}$, Char $(\boldsymbol{K}) \neq 2$, in dem eine binäre quadratische Form ausgezeichnet ist, die nicht die Null darstellt; wir sprechen dann von einer definiten Form. Bezüglich eines orthogonalen Koordinatensystems läßt dann die euklidische Ebene als affine Ebene beschreiben, in der die Orthogonalität zweier Geraden mit den Koordinaten $(u; v; w)$ und $(u'; v'; w')$ durch $v\,v' + k\,u\,u' = 0$ gekennzeichnet ist, wobei $v^2 + k\,u^2$ die definite Form ist.

Unser Axiomensystem entsteht nun aus dem BACHMANNschen, in dem wir die Eindeutigkeit des Schnittpunkts nicht mehr für verschiedene Geraden allgemein, sondern nur noch für orthogonale Geraden fordern. Hinzu kommen bei uns einige Axiome über Schmieggeraden (das sind Geraden mit mehr als einem gemeinsamen Punkt), die im eindeutigen Fall, wo jede Gerade nur sich selber als Schmieggerade besitzt, trivial werden.

Über den Begriff der Spiegelungsgeometrie ist zu sagen, daß hierbei die Eigenschaften der Ebene mit den Eigenschaften der zugehörigen Bewegungsgruppe in Zusammenhang gebracht werden. Die Möglichkeit hierzu ergibt sich aus der Bemerkung, daß den Punkten und Geraden einer euklidischen Ebene eineindeutig die Spiegelungen an ihnen zugeordnet sind, das sind die involutorischen[4]) Elemente der Bewegungsgruppe, welche die Punkte und Geraden als Fixgebilde besitzen. Wir sprechen daher von Geraden- und Punktspiegelungen. Überdies lassen sich auch die geometrischen Grundrelationen „inzident", „orthogonal" und „im Büschel liegen" in der Bewegungsgruppe einfach dadurch kennzeichnen, daß die Produkte der zugehörigen Spiegelungen involutorisch sind. Schließlich ist ja wohlbekannt, daß die Bewegungsgruppe von den Geradenspiegelungen erzeugt wird.

Unser Axiomensystem bezieht sich demgemäß auf eine Gruppe $\mathfrak{G}$ mit einem vorgegebenen System von involutorischen Erzeugenden, genannt Geradenspiegelungen. Die Punktspiegelungen werden als Produkte zweier orthogonaler (d.h. kommutierender) Geradenspiegelungen definiert. Gleichzeitig interpretieren wir die Geraden- und Punktspiegelungen in $\mathfrak{G}$ als Geraden und Punkte einer Ebene, deren Bewegungsgruppe $\mathfrak{G}$ ist. Wir stellen dann eine Reihe von Eigenschaften als Axiome auf, in denen sich diese doppelte Interpretation widerspiegelt. Das Hauptproblem ist dann, das durch unsere Axiome definierte Gebilde $\mathfrak{G}$, sei es als Gruppe oder sei es als Ebene, koordinatenmäßig darzustellen und nachzuweisen, daß die gefundene Darstellung charakteristisch ist für $\mathfrak{G}$.

Die Erreichung dieses Ziels erfordert eine längere Untersuchung, der diese Note gewidmet ist. Bei den Folgerungen, die wir aus unserem Axiomensystem ziehen, verwenden wir zunächst nur die erste Axiomgruppe und dann nehmen wir sukzessive die weiteren Axiome (oder zunächst auch nur Folgerungen aus ihnen) hinzu. Insbesondere werden die letzten beiden Axiome, durch die unsere Ebene als euklidische Ebene gegenüber Ebenen von nichteuklidischem Typ abgegrenzt wird, erst ganz zum Schluß voll herangezogen. Auf diese

[4]) Ein Gruppenelement heißt involutorisch, wenn es die Ordnung 2 hat.

Weise lassen sich die bis dahin gewonnenen Resultate eventuell auch für Ebenen von nichteuklidischem Typus verwenden. Auch J. HJELMSLEV betrachtet die euklidischen Ebenen mit Nachbarelementen nicht isoliert von den nichteuklidischen Ebenen, sondern er hat eine gemeinsame Behandlung aller ebenen metrischen Geometrien mit Nachbarelementen im Auge. Eine solche Möglichkeit zur weitgehend simultanen Behandlung der hyperbolischen, euklidischen und elliptischen Ebenen ist ja gerade eine der Stärken des Spiegelungskalküls. So erscheint es als eine in diesem Zusammenhang wichtige Aufgabe, die bei HJELMSLEV befindlichen Ansätze für die Behandlung der nichteuklidischen Ebenen mit Nachbarelementen weiter voranzutreiben und womöglich zu ähnlich abschließenden Ergebnissen zu gelangen, wie wir sie hier für die euklidische Ebene mit Nachbarelementen erhalten.

Wir interpretieren die Geraden- und Punktspiegelungen als Geraden und Punkte einer Ebene. Zwei Punkte nennen wir benachbart, wenn sie mehr als eine Verbindungsgerade haben. Zwei Geraden heißen benachbart, wenn es zu jedem Punkt auf der einen Geraden einen Nachbarpunkt auf der anderen gibt. Insbesondere erweisen sich zwei Schmieggeraden als Nachbargeraden. Weiter läßt sich zeigen, daß die Punkte und Geraden eine affine Ebene mit Nachbarelementen bilden; diesen Begriff hatten wir früher eingeführt[5]). Es handelt sich um eine Verallgemeinerung des Begriffs affine Ebene dahingehend, daß nicht die Eindeutigkeit von Schnittpunkt und Verbindungsgerade gefordert wird. Es gibt zu einer Geraden durch einen Punkt genau eine Parallele und die Eigenschaft „parallel" ist transitiv. Jedoch wird es im allgemeinen zu einer Geraden durch einen nicht auf ihr gelegenen Punkt außer der Parallelen noch weitere Nichtschneidende geben, was man in Beziehung setzen mag zu dem Auftreten von Schnittpunkten außerhalb einer begrenzten Zeichenebene.

In unserer Ebene gilt der kleine affine Satz von DESARGUES und der affine Satz von PAPPOS-PASCAL. Wir hatten gezeigt[5]), daß unter diesen Voraussetzungen die Ebene sich als affine Ebene über einem $H$-Ring beschreiben läßt. Dabei ist ein $H$-Ring ein kommutativer Ring mit Einselement, in dem jeder Nichtnullteiler invertierbar ist und von je zwei Nullteilern wenigstens einer den anderen teilt.

Ferner folgt aus unseren Axiomen, daß 2 nicht Nullteiler ist. Endlich läßt sich die Relation „orthogonal" für zwei Geraden mit den Koordinaten $(u; v; w)$ und $(u'; v'; w')$ durch $v\,v' + k\,u\,u' = 0$ beschreiben, sobald wir ein orthogonales Bezugssystem wählen. Dabei ist $v^2 + k\,u^2$ eine definite Form in dem Sinne, daß sie dann und nur dann einen Nullteiler darstellt, wenn $u$ und $v$ Nullteiler sind. $\mathfrak{G}$ gestattet damit als Bewegungsgruppe der Ebene eine treue Darstellung durch 3-reihige Matrizen über $\boldsymbol{R}_H$.

Diese Eigenschaften sind nun umgekehrt auch für den Koordinatenbereich unserer euklidischen Ebenen mit Nachbarelementen charakteristisch. Sei nämlich $\boldsymbol{R}_H$ ein $H$-Ring, für den 2 nicht Nullteiler ist, und sei $v^2 + k\,v^2$ eine definite Form in $\boldsymbol{R}_H$. Betrachten wir dann die affine Ebene über $\boldsymbol{R}_H$ und erklären

[5]) KLINGENBERG, W.: Projektive und affine Ebenen mit Nachbarelementen. Math. Z. Bd. **60**.

die Orthogonalität zweier Geraden wie oben mit Hilfe der definiten Form, so bildet diese Ebene eine euklidische Ebene mit Nachbarelementen im Sinne unseres Axiomensystems. Damit wissen wir also, wie sich jede durch unser Axiomensystem definierte Ebene oder Gruppe analytisch beschreiben läßt.

Wir erhalten als Spezialfall auch die Charakterisierung der eindeutigen euklidischen Ebenen von F. BACHMANN[3]): Bei diesen Ebenen ist der $H$-Ring ein Körper, außer der Null gibt es keine Nullteiler.

Wir bemerken noch, daß die Nachbarrelation in einer affinen Ebene mit Nachbarelementen klassenbildend ist: Die Klassen benachbarter Punkte und benachbarter Geraden bezeichnen wir als Großpunkte und Großgeraden. In der so definierten Großgeometrie gelten die Eindeutigkeitsaxiome; in unserem Falle ist die zur euklidischen Geometrie mit Nachbarelementen gehörende Großgeometrie also eine eindeutige euklidische Geometrie im Sinne von F. BACHMANN. Der Koordinatenbereich der Großgeometrie ist der Restklassenkörper $\boldsymbol{R}_H/\boldsymbol{N}$ des $H$-Rings $\boldsymbol{R}_H$ nach dem teilerlosen Ideal $\boldsymbol{N}$ der Nullteiler. In $\mathfrak{G}$ gibt es die invariante Untergruppe $\mathfrak{N}$ der Nachbarbewegungen, durch welche jeder Punkt in einen Nachbarpunkt transformiert wird. $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ ist dann die Bewegungsgruppe der Großgeometrie.

Es ist nun leicht, den Anschluß an das Axiomensystem von J. HJELMSLEV zu gewinnen und die bei ihm auftretenden Axiome durch bestimmte Eigenschaften des $H$-Rings zu charakterisieren. Gilt z. B. für die euklidische Ebene mit Nachbarelementen das Axiom der freien Beweglichkeit, so bedeutet dies, daß im zugehörigen Koordinaten-$H$-Ring die Summe von zwei Quadraten wiederum Quadrat ist. Auch angeordnete $H$-Ringe treten als Koordinatenbereich auf. Ist die Anordnung insbesondere vom archimedischen Typ, so muß der $H$-Ring notwendig ein Körper sein, vgl. [5]).

## 1. Das Axiomensystem.

**1.1.** Das Axiomensystem. Es sei eine Gruppe $\mathfrak{G}$ mit einem System involutorischer Erzeugender $g, h, j, \ldots$ gegeben, die Geradenspiegelungen oder auch Geraden heißen. Die allgemeinen Elemente $\alpha, \beta, \ldots$ von $\mathfrak{G}$ heißen Bewegungen. $e \in \mathfrak{G}$ sei das neutrale Element. Wir definieren:

*D1.* Die Relation „*g senkrecht h*", $g \perp h$, gilt, wenn $gh = hg$; $g \neq h$ ist. Die Negation bezeichnen wir mit $g \not\perp h$.

*D2.* Für $g \perp h$ heißt das Produkt $gh$ *Punkt*. Punkte werden mit $P, Q, \ldots$ bezeichnet.

*D3.* Die Relation „*g inzident P*", $g \mathrel{I} P$ oder $P \mathrel{I} g$, gilt, wenn $gP = Pg$; $g \neq P$ ist. Die Negation wird mit $g \mathrel{\not I} P$ oder $P \mathrel{\not I} g$ bezeichnet.

*D4.* Die Relation „*P benachbart Q*", $P \bigcirc Q$, gilt, wenn es $g; h$ gibt mit $g, h \mathrel{I} P, Q$; $g \neq h$. Die Negation wird mit $P \oslash Q$ bezeichnet.

*D5.* Die Relation „*g und h sind Schmieggeraden*", $g \curvearrowright h$, gilt, wenn es $P; Q$ gibt mit $P, Q \mathrel{I} g, h$; $P \neq Q$. Die Negation wird mit $g \not\curvearrowright h$ bezeichnet.

In $\mathfrak{G}$ sollen die Axiome gelten:

*A 1.* Zu $P; Q$ gibt es $g$ mit $g \mathrel{I} P, Q$. $g$ heißt *Verbindungsgerade* von $P$ und $Q$.

*A 2.* Aus $g \perp h$; $P, Q \mathrel{I} g, h$ folgt $P = Q$, oder: Aus $g \perp h$ folgt $g \not\frown h$.

*A 3.* Zu $P; g$ gibt es $h$ mit $h \mathrel{I} P$; $h \perp g$. $h$ heißt *Lot* von $P$ auf $g$.

*A 4.* Zu $g; h; j$ mit $g, h, j \mathrel{I} P$ gibt es $k$ mit $g\,h\,j = k$.

*A 5.* Zu $g; h; j$ mit $g, h, j \perp g'$ gibt es $k$ mit $g\,h\,j = k$.

*A 6.* Zu $P = g\,h$ gibt es $j$ mit $j \mathrel{I} P$; $j \not\frown g, h$.

*A 7.* Aus $g, h, g', h' \mathrel{I} P$; $g \perp h$; $g' \perp h'$; $g \frown g'$ folgt $h \frown h'$.

*A 8.* Aus $P = g\,h$; $j \mathrel{I} P$; $j \frown g$ folgt $j \not\frown h$.

*A 9.* Aus $P = g\,h$; $j \mathrel{I} P$; $j \frown j' = g\,j\,g$ folgt $j \frown g$ oder $j \frown h$.

*A 10.* Es gibt $g; h; g'; h'$ mit $g, h \perp g', h'$; $P = g\,g' \varnothing Q = g\,h'$; $P \varnothing P' = g'\,h$.

*A 11.* Zu $g, h \perp g'$; $j \mathrel{I} P = g\,g'$; $j \not\frown g$ gibt es $Q$ mit $Q \mathrel{I} j, h$.

**1.2.** Bemerkungen. Inhaltlich besagen die vorstehenden Axiome folgendes: *A 1.* Zwei Punkte haben eine Verbindungsgerade. *A 2.* Zwei orthogonale Geraden haben höchstens einen Schnittpunkt. *A 3.* Zu $P; g$ gibt es ein Lot $h$ von $P$ auf $g$. *A 4, A 5.* Wenn drei Geraden mit einem Punkt inzidieren oder auf einer Geraden senkrecht stehen, so ist ihr Produkt wieder eine Gerade. *A 6.* Zu zwei orthogonalen Geraden $g; h$ mit dem Schnittpunkt $P$ gibt es eine Gerade $j$ durch $P$, die weder zu $g$ noch zu $h$ Schmieggerade ist. *A 7.* Sind zwei mit $P$ inzidierende Geraden $g; g'$ Schmieggeraden, dann auch ihre Lote $h; h'$ in $P$. *A 8.* Inzidiert $j$ mit dem Schnittpunkt $P$ der orthogonalen Geraden $g$ und $h$, dann ist $j$ nicht gleichzeitig Schmieggerade an $g$ und $h$. *A 9.* Die Geraden $g$ und $j$ mögen den Punkt $P$ gemeinsam haben. Ist dann das Spiegelbild $j' = g\,j\,g$ von $j$ an $g$ Schmieggerade von $j$, dann ist $j$ entweder zu $g$ oder zum Lot $h$ von $g$ in $P$ Schmieggerade. *A 10.* Es gibt ein ordinäres Rechteck, d. h. vier Punkte mit paarweise orthogonalen Verbindungsgeraden, von denen einer nicht zu den beiden anliegenden Eckpunkten benachbart ist. *A 11.* Haben zwei Geraden $g; h$ eine gemeinsame Orthogonale $g'$ und schneidet eine dritte Gerade $j$ die Gerade $g$ im Schnittpunkt $P$ von $g$ und $g'$, dann schneidet $j$ auch die Gerade $h$.

*A 10* und *A 11* stellen eine Zerlegung des üblichen euklidischen Parallelenaxioms in zwei Teilaussagen dar.

Im allgemeinen fordert man an Stelle von *A 2* das Axiom

*A 12.* Aus $g \neq h$; $P, Q \mathrel{I} g, h$ folgt $P = Q$.

*S 1.* *A 2* ist ein Spezialfall von *A 12*. Gilt *A 12*, dann folgt aus $P \bigcirc Q$: $P = Q$ und aus $g \frown h$: $g = h$. Die Axiome *A 1*, *A 12*, *A 3*, *A 4*, *A 5*, *A 10*, *A 11* bilden das Axiomensystem von F. Bachmann[3]) für die euklidische Geometrie, die übrigen folgen aus diesen, darunter *A 7*, *A 8*, *A 9* trivialerweise.

Die Beweise liegen auf der Hand, wenn wir noch andeuten, wie *A 6* aus den genannten Axiomen folgt: Man fälle dazu von dem Punkt $P$ in *A 6* die Lote auf die Seiten und Diagonalen des nach *A 10* existierenden Rechtecks. Damit gibt es vier verschiedene Geraden durch $P$, woraus *A 6* folgt.

Wir bemerken noch, daß die Axiome *A 1*, *A 12*, *A 3*, *A 4*, *A 5*, und das Axiom

*A 13.* Es gibt $g; h; j$ mit $g \perp h$ und $j \nmid P = g\,h$; $j \not\perp g, h$.

das Axiomensystem der absoluten Geometrie von F. BACHMANN[6]) bilden; dieses ist äquivalent zu einem von ARNOLD SCHMIDT[7]) angegebenen Axiomensystem und es wird hierdurch ein der elliptischen, euklidischen und hyperbolischen ebenen Geometrie gemeinsamer Bereich definiert.

*A 13* ist eine Folge von *A 10*.

## 2. Folgerungen in der absoluten Geometrie.

### 2.1. Folgerungen aus A1 bis A5[8]).

*S 2.* Aus $P = g\,h$ folgt $g \perp h$; $P \mathrel{I} g, h$.

Denn jedenfalls ist $g \neq h$; $g\,h = h\,g$, also $g \perp h$. Ferner ist $g\,P = P\,g$; $h\,P = P\,h$. Wäre etwa $P = g$, so würde $h = e$ folgen. Also gilt $g \mathrel{I} P$ und ebenso $h \mathrel{I} P$.

*S 3.* Aus $g \perp h$; $P \mathrel{I} g, h$ folgt $P = g\,h$. (Ein Punkt $P$ kann als Produkt $g\,h$ irgend zweier orthogonaler Geraden $g; h$ mit $g, h \mathrel{I} P$ geschrieben werden.)

*S 4.* Aus $g, h, j \mathrel{I} P$; $g\,h\,j = k$ folgt $k \mathrel{I} P$. (Ergänzung zu *A 4*.)

Es ist $k\,P = P\,k$. Wäre $k = P$, so würde $h\,j = g\,P$ folgen. Aus $g \mathrel{I} P$ folgt $h \perp j$ und nach *S 3* $P = h\,j$, also $g = e$ — ein Widerspruch.

*S 5.* Aus $g, h, j \perp g'$; $g\,h\,j = k$ folgt $k \perp g'$. (Ergänzung zu *A 5*.)

Es ist $k\,g' = g'\,k$. Wäre $g' = k$, so würde $j\,h = g\,g'$ folgen und mit $g \perp g'$ hieraus $j \perp h$, also für $P = j\,h = g\,g'$: $P \mathrel{I} g, h, j, g'$. Aus $P = j\,g' = h\,g'$, also $j = h$ würde ein Widerspruch folgen zu $j \perp h$.

*S 6.* Zu $P; g$ mit $P \mathrel{I} g$ gibt es $h$ mit $h = P\,g$. Aus $h = P\,g$ folgt $P \mathrel{I} g$.

Falls $P \mathrel{I} g$ gilt, gibt es nach *A 3* $h$ mit $h \mathrel{I} P$; $h \perp g$. Nach *S 3* ist $P = g\,h$, also $h = P\,g$. Gilt umgekehrt $h = P\,g$, so folgt $P\,g = g\,P$; $g \neq P$ also $P \mathrel{I} g$.

*S 7.* Zu $\alpha; P$ gibt es $P^* = \alpha^{-1} P\,\alpha$.

Da sich $\alpha$ als Produkt endlich vieler Erzeugender $g, h, \ldots$ darstellen läßt, genügt es, die Behauptung für $\alpha = g$ zu beweisen (Fig. 1). Nach *A 3* gibt es $h$ mit $h \mathrel{I} P$; $h \perp g$. Nach *S 6* gibt es $j = P\,h$; $j \perp h$. Nach *A 5* gibt es $j' = g\,j\,g$. Nach *S 5* gilt $j' \perp h$. Dann gilt für $P^* = j'\,h$: $g\,P\,g = g\,j\,h\,g = g\,j\,g\,j = j'\,h = P^*$.

---

[6]) BACHMANN, F.: Zur Begründung der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff. Math. Ann. **123**, 341—344 (1951).

[7]) SCHMIDT, ARNOLD: Die Dualität von Inzidenz und Senkrechtstehen in der absoluten Geometrie. Math. Ann. **118**, 609—625 (1943).

[8]) Vgl. die Darstellung bei F. BACHMANN[6]) u. ARNOLD SCHMIDT[7]).

Es würden sich im folgenden manche Vereinfachungen ergeben, wenn wir von vorneherein auf Grund von *A 10* und *A 11* die elliptische und quasielliptische Ebene (s. **3.**) ausschließen würden. Das von uns eingeschlagene Verfahren, zunächst nur einen Teil der Axiome heranzuziehen und sukzessive weitere hinzuzunehmen, gibt dagegen einen Einblick in die Auswirkungen der einzelnen Axiome.

**2.2.** Weitere Folgerungen aus der Existenz eines Punktes, A14.

*A 14.* Es gibt $g; h$ mit $g \perp h$; es gibt also einen Punkt $P = g\,h$.

*S 8.* *A 14* folgt aus *A 10*.

*S 9.* Zu $g$ gibt es $Q$ mit $Q \mathrel{I} g$.

Denn nach *A 14* gibt es $P$, nach *A 3* das Lot $h \mathrel{I} P$; $h \perp g$, also $Q = h\,g \mathrel{I} g$.

*S 10.* Aus $P \mathrel{I} g$; $h\,P\,h = P'$; $h\,g\,h = g'$ folgt $P' \mathrel{I} g'$.

Zunächst gilt $P'\,g' = g'\,P'$. Mit $P \neq g$ gilt dann auch $P' \neq g'$, also $P' \mathrel{I} g'$.

*S 11.* Zu $\alpha; g$ gibt es $g^* = \alpha^{-1}\,g\,\alpha$.

Es genügt wiederum, dies für eine Erzeugende $\alpha = h$ zu zeigen (Fig. 2). Nach *S 9* gibt es $Q$ mit $Q \mathrel{I} h$. Nach *A 3* gibt es $j$ mit $j \mathrel{I} Q$; $j \perp g$. Sei $P = g\,j$. Nach *S 7* gibt es $P^* = h\,P\,h$. Nach *A 4* gibt es $j^* = h\,j\,h$. Aus *S 10* folgt $P^* \mathrel{I} j^*$. Nach *S 6* ist damit $j^*\,P^* = h\,j\,h\,h\,P\,h = h\,j\,P\,h = h\,g\,h$ eine Gerade $g^*$.

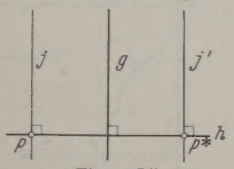

Fig. 1. *S 7.*

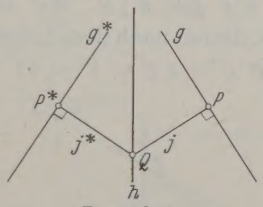

Fig. 2. *S 11.*

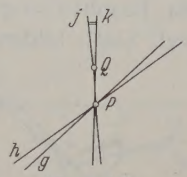

Fig. 3. *S 13.*

*S 12.* Aus $P \mathrel{I} g$ folgt $\alpha^{-1}\,P\,\alpha \mathrel{I} \alpha^{-1}\,g\,\alpha$. (Erhaltung der Inzidenz bei Bewegungen.)

Eine Folge von *S 10*.

*D 6.* $P$ heißt *Fixpunkt der Bewegung* $\alpha$, wenn $P = \alpha^{-1}\,P\,\alpha$. Die Menge der Fixpunkte von $\alpha$ bezeichnen wir mit $F(\alpha)$ [9]).

*S 13.* Zu $Q \in F(g\,h)$; $P \mathrel{I} g, h$; $g \not\perp h$ gibt es $j; k$ mit $j, k \mathrel{I} P, Q$; $j\,k = g\,h$ (Fig. 3).

Für $P = Q$ ist der Satz mit $j = g$; $k = h$ richtig. Für $P \neq Q$ bestimmen wir $j$ durch $j \mathrel{I} P, Q$. Nach *A 4* gibt es $k$ mit $k = j\,g\,h$. Nach *S 4* gilt $k \mathrel{I} P$. Ferner gilt wegen $Q \in F(g\,h)$: $k\,Q\,k = j\,g\,h\,Q\,h\,g\,j = j\,Q\,j = Q$ mit $k \neq Q$. Denn für $k = j$ ist dies jedenfalls richtig. Für $k \neq j$ und damit $g \neq h$ würde aus $k = Q$ oder $j\,g\,h = Q$ folgen: $g \perp h$, entgegen der Voraussetzung.

*S 14.* Aus $Q \in F(g\,h)$; $P \mathrel{I} g, h$; $g \not\perp h$; $g \neq h$ folgt $Q \circ P$. (Ein Fixpunkt $Q$ der Bewegung $g\,h$ ist zu einem gemeinsamen Punkt $P$ von $g$ und $h$, falls $g \not\perp h$ und $g \neq h$ gilt, benachbart.)

Dies folgt unmittelbar aus *S 13*.

*S 15.* Aus $Q \in F(g\,h)$; $P \mathrel{I} g, h$; $g \not\perp h$; $j \mathrel{I} Q$; $j \perp g$ folgt $R = j\,g \mathrel{I} h$. ($Q$ sei Fixpunkt von $g\,h$, wo $g; h$ einen gemeinsamen Punkt $P$ haben, aber $g \not\perp h$. Der Lotfußpunkt $R$ des Lotes $j$ von $Q$ auf $g$ inzidiert dann auch mit $h$ (Fig. 4).)

Für $g = h$ ist dies richtig. Für $g \neq h$ wählen wir $j'; k'$ gemäß *S 13*. Nach *A 4* ist wegen $j, j', k' \mathrel{I} Q$ $j\,j'\,k'$ eine Gerade: $j\,j'\,k' = (j\,g)\,h = h\,(g\,j)$ oder $R\,h = h\,R$. Wäre $R = j\,g = h$, so würde $g \not\perp h$ folgen. Also gilt $R \mathrel{I} h$.

[9]) Der Begriff Fixpunkt findet sich bei J. Hjelmslev[1]) 1. Mitt. S. 31.

*S 16.* Zu $g\,h\,j = k$; $g, h \mathrel{I} P$ gibt es $Q$ mit $Q \mathrel{I} j$; $Q \in F(g\,h)$. (Zur Umkehrung von *A 4*.)

Nach *A 3* gibt es (Fig. 5) $h'$ mit $h' \mathrel{I} P$; $h' \perp j$. Sei $Q = j\,h'$. Es gibt nach *A 4* $g'$ mit $g' = g\,h\,h'$. Es gilt $g' \mathrel{I} P$. Es gilt auch $g' \mathrel{I} Q$. Denn $g'\,Q\,g' = g\,h\,h'\,h'\,j\,g\,h\,h' = g\,h\,j\,g\,h\,h' = j\,h\,g\,g\,h\,h' = j\,h' = Q$ und $Q \neq g'$ (aus $Q = j\,h' = g'$ würde $j\,h = g$ oder $g\,h\,j = e$ folgen). Mit $h', g' \mathrel{I} Q$; $g\,h = g'\,h'$ folgt dann $Q \in F(g\,h)$.

*S 17.* Zu $P$ mit $P \in F(g\,h)$ gibt es $Q$ mit $Q \mathrel{I} g, h$ und umgekehrt. (Hat $g\,h$ einen Fixpunkt, dann haben $g$ und $h$ einen Punkt gemeinsam und umgekehrt.)

Die Umkehrung ist trivial: Aus $Q \mathrel{I} g, h$ folgt $Q \in F(g\,h)$. — Die erste Aussage ist für $g = h$ richtig. Wir nehmen $g \neq h$ an. Falls $g \perp h$, so gilt für $Q = g\,h$: $Q \mathrel{I} g, h$. Sei jetzt $g \not\perp h$. Es gibt $g'; j'$ mit $g', j' \mathrel{I} P$; $g' \perp g$; $j' \perp h$. Ferner gibt es $v; k'$ mit $v \mathrel{I} g\,g', h\,j'$; $k' \mathrel{I} P$; $k' \perp v$. Für $h' = g'\,k'\,j'$ gilt $h' \mathrel{I} P$. Wir behaupten: Es gibt $r' = g\,h'\,h$. Denn, nach dem Lotensatz (vgl. *S 48*), bilden wir $g'' = g\,g'\,v$; $j'' = h\,j'\,v$.

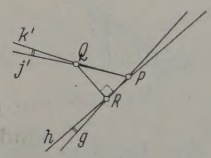

Fig. 4. *S 15.*

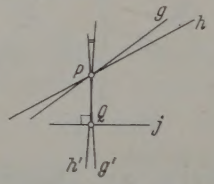

Fig. 5. *S 16.*

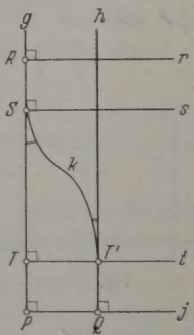

Fig. 6. *S 18.*

Damit wird $g\,h'\,h = g''\,v\,g'\,g'\,k'\,j'\,j'\,v\,j'' = g''\,v\,k'\,v\,j'' = g''\,k'\,j''$. Wegen $g'', k', j'' \perp v$ ist dies nach *A 5* eine Gerade $r'$.

Nach *S 11* gibt es dann auch $r = g\,r'\,g = g\,g\,h'\,h\,g = h'\,h\,g$. Aus $P \in F(g\,h)$ folgt dann mit $P \mathrel{I} h'$: $r\,P\,r = h'\,h\,g\,P\,g\,h\,h' = P$. $r = P$ würde auf $g \perp h$ führen, was wir ausgeschlossen haben. Also gilt $r \mathrel{I} P$. Aus $h'\,r\,g = h$; $h', r \mathrel{I} P$ folgt nach *S 16* die Existenz von $Q$ mit $Q \mathrel{I} g$; $Q \in F(h'\,r) = F(g\,h)$. Damit gilt auch $h\,Q\,h = Q$. Aus $Q = h$ würde $h' \perp r$ und damit auch $g \perp h$ folgen. Also gilt $Q \mathrel{I} g, h$.

*S 18.* Aus $g, h \perp j$; $k \mathrel{I} Q = h\,j$; $k \curvearrowright g$ folgt $k \curvearrowright h$ (Fig. 6)[10].

Wegen $g \curvearrowright k$ gibt es $R$; $S$ mit $R \neq S$; $R, S \mathrel{I} g, k$. Es sei $r = R\,g$; $s = S\,g$. Wegen $r, s, j \perp g$ gibt es $t = r\,s\,j$; $t \perp g$. Sei $T = g\,t$. Dann ist also $R\,S = T\,P$ mit $P = g\,j$. Auf dieselbe Weise erschließt man wegen $R, S, Q \mathrel{I} k$ ein $T'$ mit $T' \mathrel{I} k$; $R\,S = T'\,Q$. Aus $T\,P = T'\,Q$ oder $T' = T\,P\,Q = t\,g\,g\,j\,j\,h = t\,h$ folgt nach *S 2*: $T' \mathrel{I} t, h$. Da mit $R \neq S$ auch $T' \neq Q$ gilt, bedeutet $Q, T' \mathrel{I} h, k$: $h \curvearrowright k$.

### 2.3. Weitere Folgerungen unter Verwendung von A 7.

*S 19.* Aus $Q \in F(g\,h)$; $P \mathrel{I} g, h$; $g \curvearrowright h$; $g \not\perp h$ folgt $Q = P$. (Haben zwei nichtorthogonale Geraden $g$; $h$ nur einen Schnittpunkt, dann ist dies der einzige Fixpunkt von $g\,h$.)

[10]) Vgl. J. HJELMSLEV[1]) 1. Mitt. S. 18.

Nach *S15* gilt für $R = g\,j$ mit $j \mathrel{I} Q$; $j \perp g$: $R \mathrel{I} h$. Wegen $g \not\asymp h$ ist $R = P$. Ebenso folgt für $S = k\,h$ mit $k \mathrel{I} Q$; $k \perp h$: $S = P$. Aus $g\,j = h\,k = P$ und $g \not\asymp h$ folgt mit *A7*: $j \not\asymp k$. Also ist $Q = P$.

*S20.* Aus $g\,h\,j = k$; $g, h \mathrel{I} P$; $g \not\asymp h$ folgt $j \mathrel{I} P$. (Zur Umkehrung von *A4*.)

Ist $g \perp h$, also $P = g\,h$, so folgt mit *S6* aus $P\,j = k$: $j \mathrel{I} P$. — Ist $g \not\perp h$, so folgt mit *S16* die Existenz von $Q$ mit $Q \mathrel{I} j$; $Q \in F(g\,h)$. Aus *S19* folgt damit wegen $g \not\asymp h$: $Q = P$, also $j \mathrel{I} P$.

*S21.* Aus $P, Q \mathrel{I} g, h$; $j \mathrel{I} P, R$; $k \mathrel{I} Q, R$; $j \not\asymp k$ folgt $R \in F(g\,h)$.

Nach *A4* gibt es $l; m$ so, daß $g\,h = j\,l = k\,m$ gilt. Aus *S20* folgt für $j\,k\,m = l$ aus $j \not\asymp k$: $m \mathrel{I} R$, also $g\,h\,R\,h\,g = k\,m\,R\,m\,k = R$.

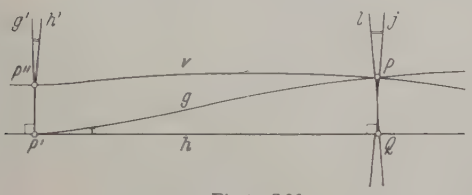


Fig. 7. *S23.*

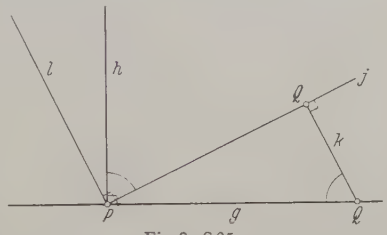


Fig. 8. *S25.*

*S22.* Aus $P \bigcirc Q$; $j \mathrel{I} P, R$; $k \mathrel{I} Q, R$; $j \not\asymp k$ folgt $R \bigcirc P, Q$. (Ist in einem Dreieck $P; Q; R$: $P \bigcirc Q$, und schneiden sich die Dreiecksseiten in $R$ eindeutig, so ist $R \bigcirc P, Q$.)

Falls $P = Q$, folgt aus $j \not\asymp k$: $P = Q = R$. Falls $P \neq Q$, gibt es $g; h$ mit $g \neq h$; $g, h \mathrel{I} P, Q$. Aus *S21* folgt $R \in F(g\,h)$. Wegen *A2* ist $g \not\perp h$. Damit folgt aus *S14*: $R \bigcirc P, Q$.

*S23.* Aus $g \curvearrowright h$; $P \mathrel{I} g, j$; $j \perp h$; $Q = j\,h$ folgt $P \bigcirc Q$ [11]).

Wir können $g \neq h$ annehmen (Fig. 7). Es gibt $P'$ mit $P' \mathrel{I} g, h$. Es gibt $g' = P'\,g$; $h' = P'\,h$. Nach *A7* gilt mit $g \curvearrowright h$ auch $g' \curvearrowright h'$. Damit gibt es $P''$ mit $P'' \neq P'$; $P'' \mathrel{I} g', h'$. Nach *A1* gibt es $v$ mit $v \mathrel{I} P, P''$. Nach *A4* ist $g'\,h'\,v = g\,P'\,P'\,h\,v = g\,h\,v$ eine Gerade. Ferner gibt es nach *A4* $l = g\,v\,j$.

Wir behaupten: $l \mathrel{I} P, Q$; $l \neq j$, woraus dann $P \bigcirc Q$ folgt. Zunächst ist $l\,Q\,l = g\,v\,j\,j\,h\,g\,v\,j = g\,v\,h\,g\,v\,j = g\,g\,h\,v\,v\,j = h\,j = Q$ und $l \neq Q$, da aus $l = Q$ oder $g\,v\,j = Q = h\,j$ folgt: $g \perp h$. Also ist $Q \mathrel{I} l$. Aus $l = j$ oder $g\,v\,j = j$; $g = v$ folgt $g \mathrel{I} P''$. $P, P'' \mathrel{I} g, g'$; $P \neq P''$ widerspricht aber nach *A2* der Voraussetzung $g \perp g'$.

*S24.* Aus $g \curvearrowright h$; $P \mathrel{I} g, j$; $Q \mathrel{I} h, j$; $h \curvearrowright j$ folgt $P \bigcirc Q$. (Werden zwei Schmiegeraden $g; h$ von einer Geraden $j$ in $P$ und $Q$ geschnitten, dabei in $Q$ eindeutig, so sind $P$ und $Q$ Nachbarpunkte.)

Denn es gibt $j'$ mit $j' \mathrel{I} P$; $j' \perp h$. Für $Q' = j'\,h$ gilt nach *S23* $Q' \bigcirc P$. Wenn man $P; Q'; Q$ mit den Punkten $P; Q; R$ in *S22* identifiziert, folgt $P \bigcirc Q$.

*S25.* Aus $P = g\,h$; $Q \mathrel{I} g$; $j \mathrel{I} P$; $j \not\asymp h$; $k \mathrel{I} Q$; $k \perp j$ folgt $k \not\asymp g$ (Fig. 8; man bezeichne hier den Punkt $k_j$ mit $R$ statt mit $Q$).

[11]) Vgl. J. Hjelmslev[1]) 5. Mitt. S. 8.

Es gibt $l = Pj$; $l \perp j$. Wäre $k \curvearrowright g$, so würde nach *S 18* folgen $l \curvearrowright g$. Aus $P = g\,h = j\,l$; $l \curvearrowright g$ folgt nach *A 7* $j \curvearrowright h$, entgegen der Voraussetzung.

**2.4.** Weitere Folgerungen aus A 6, A 8 und der Existenz zweier nichtbenachbarter Punkte, A 15.

*S 26.* Aus $P, Q, R \mathrel{I} g$; $P \bigcirc Q$; $Q \bigcirc R$ folgt $P \bigcirc R$. (Die Relation „benachbart" ist für Punkte auf einer Geraden $g$ transitiv[12].)

Wir können $P \neq Q$ und $Q \neq R$ annehmen (Fig. 9). Es gibt $h = Rg$; $h \perp g$. Nach *A 6* gibt es $j$ mit $j \mathrel{I} R$; $j \not\curvearrowright g, h$. Nach *A 3* gibt es $k$ mit $k \mathrel{I} P$; $k \perp j$. Sei $S = kj$. Es ist $k \not\curvearrowright g$ nach *S 25*. Es gibt $l$ mit $l \mathrel{I} Q, S$. Wegen *A 8* gilt nicht zugleich $l \curvearrowright j, k$. Falls $l \not\curvearrowright k$, so folgt aus *S 22* wegen $P \bigcirc Q$: $P \bigcirc S$ und hieraus mit *S 22* wegen $j \not\curvearrowright g$: $P \bigcirc R$. Ebenso schließt man bei $l \not\curvearrowright j$.

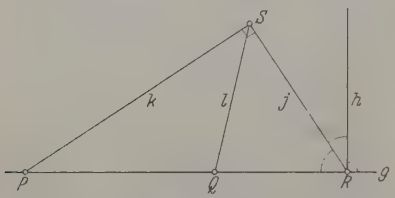

Fig. 9. *S 26.*

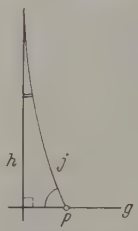

Fig. 10. *S 27.*

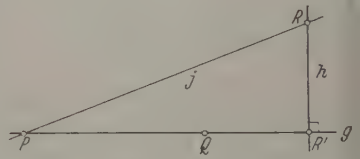

Fig. 11. *S 28.*

*S 27.* Aus $g \perp h$; $P \mathrel{I} j, g$; $j \curvearrowright h$ folgt $j \not\curvearrowright g$ (Fig. 10).

Es gibt $k = Pg$; $k \perp g$. Nach *S 18* folgt wegen $j \curvearrowright h$: $k \curvearrowright j$. Aus *A 8* folgt $j \not\curvearrowright g$.

*S 28.* Aus $P \bigcirc Q$; $Q \bigcirc R$ folgt $P \bigcirc R$. (Die Relation „benachbart" für Punkte ist transitiv[12].)

Wir nehmen $P \neq Q$; $Q \neq R$ an (Fig. 11). Es gibt $g$; $h$ mit $g \mathrel{I} P, Q$; $h \mathrel{I} R$; $h \perp g$. Sei $g\,h = R'$. Wegen $Q \bigcirc R$ folgt aus *S 22* $Q, R \bigcirc R'$. Aus *S 26* folgt $P \bigcirc R'$. Es gibt $j$ mit $j \mathrel{I} P, R$. Nach *S 27* ist nicht zugleich $j \curvearrowright g, h$. Aus $j \not\curvearrowright g$ folgt nach *S 22* mit $R \bigcirc R'$: $P \bigcirc R$. Aus $j \not\curvearrowright h$ folgt mit $P \bigcirc R'$: $P \bigcirc R$.

*S 29.* Die Relation „benachbart" für Punkte ist eine Äquivalenzrelation. Denn aus *D 4* folgt Symmetrie und Reflexivität, aus *S 28* Transivität.

*A 15.* Es gibt $P$; $Q$ mit $P \varnothing Q$.

*S 30.* A 15 ist eine Folge von A 10.

*S 31.* Zu $P$; $g$ mit $P \mathrel{I} g$ gibt es $Q$ mit $Q \mathrel{I} g$; $Q \varnothing P$.

Nach *A 15* gibt es $P'$; $Q'$ mit $P' \varnothing Q'$. Wegen *S 27* können wir $P \varnothing Q'$ annehmen. Es gibt $h$ mit $h \mathrel{I} P, Q'$ und $k$ mit $k = Pg$; $k \perp g$. Nach *A 8* ist $h \not\curvearrowright k$ oder $h \not\curvearrowright g$. (I) $h \not\curvearrowright k$. Es gibt $l$ mit $l \mathrel{I} Q'$; $l \perp g$. Für $Q = lg$ gilt dann $Q \mathrel{I} g$; $Q \varnothing P$. Denn zunächst ist nach *S 18* mit $h \not\curvearrowright k$ auch $h \not\curvearrowright l$. Wäre nun $P \bigcirc Q$, so würde nach *S 22* folgen: $P \bigcirc Q'$. — (II) $h \not\curvearrowright g$. Dann folgt ebenso wie unter (I) die Existenz von $R$ mit $R \mathrel{I} k$; $R \varnothing P$. Hieraus folgt aber die Existenz von $Q$ mit $Q \mathrel{I} g$; $Q \varnothing P$: Denn nach *A 6* gibt es $m$ mit $m \mathrel{I} P$; $m \not\curvearrowright g, k$.

[12]) Vgl. J. HJELMSLEV[1]) 3. Mitt. S. 14.

Für $n$ mit $n \mathrel{I} R$; $n \perp m$ gilt nach *S25* $n \not\asymp k$. Für $S = n\,m$ gilt damit nach *S22* $S \not\circ P$. Es gibt $t$ mit $t \mathrel{I} S$; $t \perp g$. Wegen $m \not\asymp k$ gilt nach *S18* auch $t \not\asymp m$. Für $Q = t\,g$ gilt damit nach *S22* $Q \not\circ P$.

*S32.* Zu $g$ gibt es $P$; $Q$ mit $P, Q \mathrel{I} g$; $P \not\circ Q$. (Auf jeder Geraden gibt es zwei Punkte, die nicht benachbart sind.)

Dies folgt aus *S9*; *S31.*

*D7.* Die Relation „*g benachbart h*", $g \circ h$, gilt, wenn es zu $P$ mit $P \mathrel{I} g$ ein $Q$ gibt mit $Q \mathrel{I} h$; $Q \circ P$ und zu $Q$ mit $Q \mathrel{I} h$ ein $P$ gibt mit $P \mathrel{I} g$; $P \circ Q$. Die Negation wird mit $g \not\circ h$ bezeichnet[13]).

*S33.* Die Relation „benachbart" für Geraden ist eine Äquivalenzrelation.

Das folgt aus *D7* und *S29.*

*S34.* Aus $g \circ h$ und der Existenz von $P$ mit $P \mathrel{I} g, h$ folgt $g \frown h$. Umgekehrt folgt aus $g \frown h$ die Existenz von $P$ mit $P \mathrel{I} g, h$ und $g \circ h$.

Wenn $g \circ h$ und $P \mathrel{I} g, h$, so gibt es nach *S31* $Q$ mit $Q \mathrel{I} g$; $Q \not\circ P$. Nach D7 gibt es $R$ mit $R \mathrel{I} h$; $R \circ Q$. Aus *S22* folgt $g \frown h$. Gilt umgekehrt $g \frown h$, so gibt es nach *D5* $P$ mit $P \mathrel{I} g, h$. Damit folgt $g \circ h$ aus *S23.*

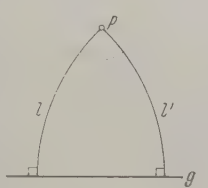

Fig. 12. *D9.*

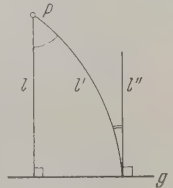

Fig. 13. *D10.*

*S35.* Aus $P \mathrel{I} h, j$; $Q \mathrel{I} j, g$; $R \mathrel{I} g, h$; $h \not\asymp j$ folgt $j \not\asymp g$ oder $g \not\asymp h$. (Schneidet sich von den drei Seitenpaaren eines Dreiecks wenigstens eines eindeutig, so auch noch ein zweites.)

Denn aus $j \frown g$ und $g \frown h$, oder wegen *S34*, aus $j \circ g$ und $g \circ h$ folgt $j \circ h$ und hieraus nach *S34* $j \frown h$, entgegen der Voraussetzung.

*D8.* Eine Bewegung $\alpha \in \mathfrak{G}$ heißt *Nachbarbewegung*, wenn für jedes $P$ gilt $\alpha^{-1} P \alpha \circ P$. Die Menge der Nachbarbewegungen bezeichnen wir mit $\mathfrak{N}$.

*S36.* $\mathfrak{N}$ ist eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{G}$.

Denn mit $\alpha, \beta \in \mathfrak{N}$ gilt auch $\alpha\beta \in \mathfrak{N}$ gemäß *S28.* Mit $\alpha \in \mathfrak{N}$ gilt auch $\alpha^{-1} \in \mathfrak{N}$; denn nach *S12* folgt aus $P \circ Q = \alpha^{-1} P \alpha$: $\alpha P \alpha^{-1} \circ \alpha Q \alpha^{-1} = P$. Ebenso ergibt sich, daß aus $\alpha \in \mathfrak{N}$ folgt $\gamma^{-1} \alpha \gamma \in \mathfrak{N}$.

### 3. Die elliptische und quasielliptische Ebene.

In der elliptischen Ebene sind die Spiegelung an einer Geraden und dem Pol der Geraden dieselbe Bewegung. Wenn es daher in $\mathfrak{G}$ ein Paar $P$; $g$ gibt mit $P = g$, so nennen wir $\mathfrak{G}$ elliptisch. Eine elliptische Ebene ist auch dadurch gekennzeichnet, daß es einen Punkt $P$ und eine Gerade $g$ so gibt, daß es von $P$ auf $g$ zwei nichtbenachbarte Lote gibt (Fig. 12). Es ist dann $P - g$. Es könnte aber auch vorkommen, daß es einen Punkt $P$ und eine Gerade $g$ gibt, für die außer dem Lot $l$ von $P$ auf $g$ noch eine nichtbenachbarte Gerade $l'$ durch $P$ existiert, die Schmieggerade an ein Lot $l''$ auf $g$ ist (Fig. 13). Wir nennen $\mathfrak{G}$ in diesem Fall quasielliptisch.

[13]) Der Begriff „Nachbargerade" findet sich bei J. Hjelmslev[1]) 3. Mitt. S. 15.

Ist $\mathfrak{G}$ elliptisch, so auch quasielliptisch. Wir zeigen, daß die quasielliptischen und a fortiori die elliptischen Ebenen im Widerspruch stehen zu *A 10* und *A 11*.

### 3.1. Folgerungen aus der Existenz von $P; g$ mit $P = g$[14]).

*D 9.* $\mathfrak{G}$ heißt *elliptisch*, wenn es $P; g$ gibt mit $P = g$.

*S 37.* Ist $\mathfrak{G}$ elliptisch, so gibt es zu $Q$ ein $h$ mit $h = Q$ und zu $h$ ein $Q$ mit $Q = h$.

Es sei $P = g$ und $Q \neq P$ (Fig. 14). Es gibt $j$ mit $j \mathrel{I} P, Q$ und $j \perp g$. Es gibt $k = j P$; $k \perp g$. Es ist $j\,k\,g = P\,g = e$, also $R = g\,k = j$. Es gibt $l$ mit $l \mathrel{I} Q, R$; $l \perp j$. Wegen $j \mathrel{I} Q$ ist also $Q = j\,l$. Für $h = R\,l$ gilt dann $h = R\,l = j\,l = Q$.

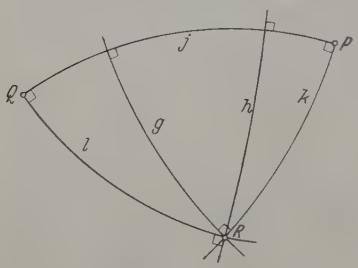

Fig. 14. *S 37.*

Ferner sei $h$ gegeben mit $h \neq g$ (Fig. 14). Es gibt $j$ mit $j \mathrel{I} P$; $j \perp h, g$. Es gibt $k$ mit $k = j P$; $k \perp g$. Es ist $j\,k\,g = P\,g = e$, also $R = g\,k = j$. Es gibt $l$ mit $l \mathrel{I} R$; $l \perp h$; $l \perp j$. Weil mit $R = j$; $j \perp h$ auch $h \mathrel{I} R$ ist, wird $R = h\,l$. Damit wird $Q = j\,l = R\,l = h$.

*S 38.* Wenn *A 10* gilt, ist $\mathfrak{G}$ nicht elliptisch.

Wir betrachten die nach *A 10* existierenden Geraden $g; h; g'; h'$ mit $g, h \perp g', h'$. Wäre $\mathfrak{G}$ elliptisch, so würde für $P = g\,g'$; $P' = h\,g'$ folgen: $P \bigcirc P'$, im Gegensatz zu *A 10*. — Zum Beweis betrachten wir die nach *S 37* existierenden Punkte $Q; R$ mit $Q = g'$; $R = h'$. Es gilt $g, h \mathrel{I} Q, R$, woraus wegen $g' \neq h'$ oder $Q \neq R$ folgt: $g \mathrel{\text{⌒}} h$. Hieraus folgt wegen $g' \not\mathrel{\text{⌒}} g, h$ nach *S 24*: $g\,g' \bigcirc h\,g'$.

*S 39.* $\mathfrak{G}$ ist dann und nur dann elliptisch, wenn es $P; g; l; l'$ gibt mit $P \mathrel{I} l, l'$; $l, l' \perp g$; $l \mathrel{\text{⌒}} l'$ (Fig. 12).

Wenn $\mathfrak{G}$ elliptisch ist, betrachten wir zu $P; g$ mit $P = g$ ein $l$ mit $l \mathrel{I} P$; $l \perp g$ und $l' = l P$. Diese Elemente genügen den angegebenen Forderungen. Umgekehrt folgt aus $P \mathrel{I} l, l'$; $l, l' \perp g$; $l \mathrel{\text{⌒}} l'$: Für $P' = g P g$ gilt $P' \mathrel{I} l, l'$, also $P' = g P g = P$. Aus $P \mathrel{I} g$ folgt $P = g\,l = g\,l'$, also $l = l'$, ein Widerspruch. Also gilt $P = g$.

### 3.2. Der quasielliptische Fall. A 16.

*D 10.* $\mathfrak{G}$ heißt *quasielliptisch*, wenn es $P; g; l; l'; l''$ gibt mit $P \mathrel{I} l, l'$; $l, l'' \perp g$; $l \mathrel{\text{⌒}} l'$; $l' \mathrel{I} g\,l''$; $l' \mathrel{\text{⌒}} l''$ (Fig. 13).

*S 40.* Wenn $\mathfrak{G}$ elliptisch ist, dann auch quasielliptisch.

Dies folgt aus *S 39* und *D 10* für $l' = l''$.

*A 16.* Zu $g, h \perp g'$; $P = g\,g' \bigcirc P' = h\,g'$; $j \mathrel{I} P$; $j \not\mathrel{\text{⌒}} g$ gibt es $Q$ mit $Q \mathrel{I} j, h$.

*S 41.* *A 16* folgt aus *A 11*. *A 16* folgt aus *A 12*.

Denn offenbar ist *A 16* ein Spezialfall von *A 11*. Gilt *A 12*, so wird $P = P'$, also $g = h$, so daß man $Q = P$ setzen kann.

[14]) Vgl. F. BACHMANN[3]) und ARNOLD SCHMIDT[7]).

*S 42.* Wenn $\mathfrak{G}$ quasielliptisch ist und *A 16* gilt, dann ist $\mathfrak{G}$ elliptisch.

Wir betrachten die nach *D 10* existierenden Elemente (Fig. 15). Es gibt $k$ mit $k \mathrel{I} P$; $k \perp l''$. Für $h = kP$; $h \perp k$ folgt nach *S 18* wegen $l' \frown l''$: $h \frown l'$. Also $h \not\frown l$. Aus *A 16* folgt damit die Existenz von $Q$ mit $Q \mathrel{I} l, l''$. Es gilt $l \not\frown l''$; denn aus $l \frown l''$; $l'' \frown l'$ folgt $l \frown l'$. Also genügen $Q; g; l; l''$ den Bedingungen von *S 39*.

*S 43.* Gelten in $\mathfrak{G}$ die Axiome *A 1* bis *A 11*, dann ist $\mathfrak{G}$ nicht quasielliptisch und also auch nicht elliptisch.

Dies ist eine Folgerung aus den vorstehenden Sätzen.

### 4. Folgerungen mit A 9 und der Eindeutigkeit der Orthogonalen.

Wir ziehen zunächst einige Folgerungen aus *A 9*, betreffend Nachbarbewegungen und die Umkehrung von *A 5*. Sodann setzen wir die Eindeutigkeit des nach *A 3* bestimmten Lotes voraus; diese Eindeutigkeit folgt aus den bisher verwendeten Axiomen, wenn wir den quasielliptischen Fall ausschließen. Wir können dann den Begriff der Halbdrehung einführen und hiermit den affinen Satz von Pappos-Pascal beweisen.

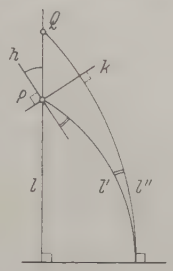

Fig. 15. *S 42.*

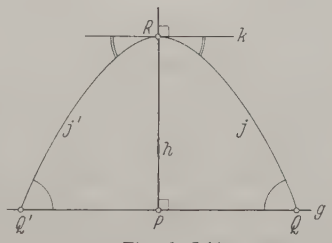

Fig. 16. *S 44.*

**4.1.** Folgerungen mit A 9.

*S 44.* Es ist $P \notin \mathfrak{N}$. (Die Punktspiegelung ist keine Nachbarbewegung.)

Sei $P = gh$. Nach *S 31* gibt es $Q$ mit $Q \mathrel{I} g$; $Q \varnothing P$. Ist $Q' = PQP \varnothing Q$, so sind wir fertig. Ist dagegen $Q' = PQP \bigcirc Q$ (Fig. 16), dann bestimmen wir $R$ mit $R \mathrel{I} h$; $R \varnothing P$. Es gibt $j$ mit $j \mathrel{I} Q, R$. Wegen $P \varnothing Q, R$ folgt aus *S 23* $j \not\frown g, h$. Für $j' = hjh$ und $Q' = PQP = hQh$ gilt $j' \mathrel{I} R, Q'$. Aus $Q \bigcirc Q'$; $Q \varnothing R$ (dies folgt aus *S 22* wegen $g \perp h$) folgt nach *S 22*: $j' = hjh \frown j$. Nach *A 9* folgt wegen $j \not\frown h$: $j \frown k = Rh$; $k \perp h$. Wir sind also für das Paar $Q; h$ im quasielliptischen Fall.

Nach *A 6* gibt es $l$ mit $l \mathrel{I} R$; $l \not\frown h, k$ und damit auch $l \not\frown j$. Für $m$ mit $m \perp l$; $m \mathrel{I} P$ folgt aus *S 25* $m \not\frown h$. Damit gilt für $S = lm$ wegen $R \varnothing P$: $S \varnothing R, P$. Wir unterscheiden nun zwei Fälle: (I) $m \frown g$. Es gibt $n$ mit $n \mathrel{I} S$; $n \perp g$ und $T = ng$. Wegen *S 23* gilt $S \bigcirc T$, also $T \varnothing P$. Für $p$ mit $p \mathrel{I} R, T$ gilt damit $p \frown l$, also $p \not\frown h, j$. Damit ist dann $T' = PTP \varnothing T$. Aus $T' \bigcirc T$ würde nämlich wie oben für $Q$ folgen: $p \frown k \frown j$. (II) $m \not\frown g$. Es gibt $n'$ mit $n' \perp h$; $n' \mathrel{I} S$. Wegen *S 18* folgt aus $l \not\frown k$; $m \not\frown g$: $n' \not\frown l, m$. Wegen $S \varnothing P, R$ folgt damit aus *S 22* $T' = n'h \varnothing R, P$. Es kann nun nicht zugleich $PRP \bigcirc R$ und $PT'P \bigcirc T'$ gelten; denn hieraus würde, wie aus dem Beweisgang hervorgeht, für $p'$ mit $p' \mathrel{I} Q, T'$ folgen: $p' \not\frown h$, $p' \frown j$. Dies steht aber im Widerspruch zu $T' \varnothing R$.

*S 45.* Aus $g \bigcirc h$ folgt $gh \in \mathfrak{N}$ und umgekehrt.

(I) Aus $g \frown h$ folgt $g\,h \subset \mathfrak{R}$. Denn zu einem Punkt $P$ und zu einem $Q$ mit $Q \mathrel{I} g, h$ gibt es $j$ mit $j \mathrel{I} P, Q$. Nach *A 4* gibt es $k$ mit $k = j\,g\,h$. Es gilt $j \frown k$. (Wäre nämlich $j \not\frown k$, so wäre nach *S 19*, da wir $j \perp k$ ausschließen können, $Q$ der einzige Fixpunkt von $j\,k = g\,h$, was wegen $g \frown h$ offenbar falsch ist.) Hiermit folgt für $h\,g\,P\,g\,h = k\,j\,P\,j\,k = k\,P\,k$: $k\,P\,k \circ P$. Denn es gibt $l$ mit $l \mathrel{I} P$; $l \perp k$ und $R = k\,l$. Wegen *S 23* ist $R \circ P$. Dann gilt auch $R \circ R\,P\,R = k\,l\,P\,l\,k = k\,P\,k$, also $k\,P\,k \circ P$.

(II) Aus $g \circ h$ folgt $g\,h \in \mathfrak{R}$. Es gibt nämlich nach *S 28*; *S 31* $P$; $Q$ mit $P \mathrel{I} g$; $Q \mathrel{I} h$; $P \varnothing Q$. Für $j$ mit $j \mathrel{I} P, Q$ gilt nach *S 22* $j \frown g, h$. Wegen (I) ist $g\,j, j\,h \in \mathfrak{R}$, also auch $g\,h \in \mathfrak{R}$.

(III) Aus $g \varnothing h$ folgt $g\,h \notin \mathfrak{R}$. Denn nach Voraussetzung gibt es $P$ mit $P \mathrel{I} g$ und $j$ mit $j \mathrel{I} P$; $j \perp h$ und $Q = j\,h$ so, daß $P \varnothing Q$. Ist $h\,g\,P\,g\,h = h\,P\,h \varnothing P$, so sind wir fertig. Sei jetzt $h\,P\,h \circ P$. Nach *S 31* gibt es $P'$ mit $P' \mathrel{I} g$: $P' \varnothing P$. Es gibt $j'$ mit $j' \mathrel{I} P'$; $j' \perp h$ und $Q' = j'\,h$. Es ist $P \varnothing Q'$, da aus $P \circ Q'$ nach *S 22* $P \circ Q$ folgen würde. Es gibt $k$ mit $k \mathrel{I} P, Q'$. Für $k' = h\,k\,h$ gilt $k' \mathrel{I} Q', h\,P\,h$. Wegen $P \circ h\,P\,h$; $Q' \varnothing P$ folgt aus *S 22* $h\,k\,h \frown k$. Nach *A 9* folgt aus $k \not\frown h$ (dies gilt wegen $P \varnothing Q$): $k \frown j'$. Dann gilt auch $g \frown j'$ (aus $g \not\frown j'$; $k \frown j'$ würde nach *S 23* folgen $P \circ P'$). Aus $g\,h - g\,j'\,j'\,h - g\,j'\,Q'$ lesen wir wegen $g\,j' \in \mathfrak{R}$ und $Q' \notin \mathfrak{R}$ (nach *S 44*) ab: $g\,h \notin \mathfrak{R}$.

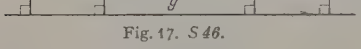

Fig. 17. *S 46*.

*S 46*. Aus $g\,h\,j = k$; $g, h \perp g'$; $g \varnothing h$ folgt $j \perp g'$. (Umkehrung von *A 5* [6]).)

Es gibt (Fig. 17) $P$ mit $P \mathrel{I} j$ und $j'$ mit $j' \mathrel{I} P$; $j' \perp g'$. Nach *A 5* gibt es $k'$ mit $k' = g\,h\,j'$; $k' \perp g'$. Wir unterscheiden drei Fälle:

(I) $j \not\frown j'$. Wegen *S 20* folgt dann aus $j\,j' = k\,k'$: $j, j', k, k' \mathrel{I} P$, und wegen $j \not\frown k$ (dies folgt aus $g \not\frown h$; *S 45*) folgt auch $g, h \mathrel{I} P$. Damit sind wir nach *S 39* im elliptischen Fall: $P = g'$, also $j \perp g'$.

(II) $j \frown j'$, aber $j \neq j'$. Zu $j'\,j\,k = k'$; $P \mathrel{I} j, j'$ gibt es nach *S 16* $Q$ mit $Q \mathrel{I} k, k'$; $Q \in F(j\,j')$. Aus *S 14* folgt $Q \circ P$. Nach *S 31* gibt es $P'$ mit $P' \mathrel{I} j$; $P' \varnothing P$. Es gibt $j''$ mit $j'' \perp g'$, $j'' \mathrel{I} P'$. Hiermit nach *A 5* $k'' = j''\,g\,h = j''\,j\,k$. Entweder ist $j'' \not\frown j$, dann schließen wir wie unter (I). Oder es ist $j'' = j$, das ist die Behauptung. Oder es ist $j'' \frown j$; $j'' \neq j$. Dann gibt es wie oben ein $Q'$ mit $Q' \mathrel{I} k, k''$; $Q' \circ P'$. Aus $j \mathrel{I} P, P''$; $k \mathrel{I} Q, Q'$; $P \varnothing P'$; $P \circ Q$; $P' \circ Q'$ folgt $j \circ k$; dies widerspricht aber nach *S 45* der Voraussetzung $g \varnothing h$.

(III) $j = j'$. Dies ist wegen $j' \perp g'$ die Behauptung.

### 4.2. Die Eindeutigkeit des Lotes. Halbdrehungen. A 17.

*A 17*. Aus $g, h \mathrel{I} P$; $g, h \perp j$ folgt $g = h$. (Eindeutigkeit des Lotes.)

*S 47*. Wenn $\mathfrak{G}$ nicht quasielliptisch ist, dann folgt *A 17* aus den bisher benutzten Axiomen *A 1* bis *A 9*, *A 14* und *A 16*. Damit ist *A 17* insbesondere eine Folge von *A 1* bis *A 11*.

(I) Zu $Q = g\,l$; $P \mathrel{I} l$; $P \circ Q$ gibt es $j$; $S$ mit $S \mathrel{I} g$; $j \mathrel{I} P, S$; $j \not\frown l, g$. — Wir wählen zum Beweis $k = P\,l$; $k \perp l$. Nach *A 6* gibt es $j$ mit $j \mathrel{I} P$; $j \not\frown l, k$.

Nach *A 16* gibt es $S$ mit $S \mathrel{I} j, g$. Wegen *S 18* folgt aus $j \not\asymp k$: $j \not\asymp g$. *S 18* ist dabei eine Folge von *A 1* bis *A 5* und *A 14*.

(II) Es sei $\mathfrak{G}$ nicht quasielliptisch. Die Annahme, es gibt $P; g; l; m$ mit $P \mathrel{I} l, m; l, m \perp g; l \neq m$ führt folgendermaßen auf einen Widerspruch (Fig. 18): Falls $P \mathrel{I} g$, dann folgt $l = m$ aus *S 3*. Sei also $P \not I g$. Für $P' = g P g$ gilt $P' \mathrel{I} l, m$. Wegen $l \neq m$ ist $P \bigcirc P'$. Sei $Q = g l$. Es gibt $R$ mit $R \mathrel{I} g$; $R \oslash Q$. Wegen *S 22* gilt auch $R \oslash P$. Es gibt $h$ mit $h \mathrel{I} P, R$. Es ist $h' = g h g \mathrel{I} R, P'$. Wegen $P \bigcirc P'$; $R \oslash P$ folgt aus *S 22* $h' = g h g \bigcirc h$. Aus *A 9* folgt, da der fastelliptische Fall ausgeschlossen ist: $g \bigcirc h$, also $P \bigcirc Q$. Nach (I) gibt es $j; S$ mit $S \mathrel{I} g, j$; $j \mathrel{I} P$; $j \not\asymp l, g$. Für $j' = g j g$ ist $j' \mathrel{I} S, P'$. Es ist $j \not\asymp j'$; denn aus $j \asymp j'$ würde nach *A 9* folgen, da der quasielliptische Fall ausgeschlossen

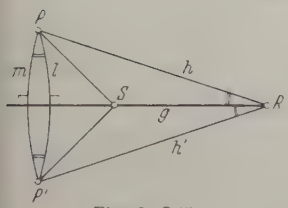

Fig. 18. *S 47.*

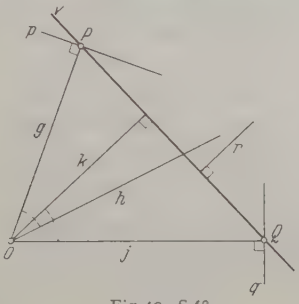

Fig. 19. *S 48.*

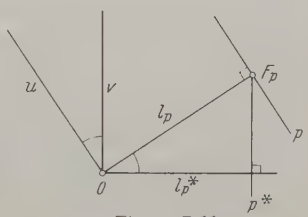

Fig. 20. *D 11.*

ist, $j \asymp g$. Aus $j \not\asymp j'$ folgt nach *S 21* $S \in F(l\,m)$. Aus *S 15* folgt $Q = g\,l \mathrel{I} m$, oder $g\,l\,m = m\,g\,l = g\,m\,l$; $l\,m = m\,l$ und wegen $l \neq m$: $l \perp m$. Das bedeutet aber den elliptischen Fall, den wir ausgeschlossen hatten.

(III) *A 14* und *A 16* und die Forderung: $\mathfrak{G}$ ist nicht quasielliptisch folgen aus *A 1* bis *A 11*. Dies besagen *S 8*, *S 41* und *S 43*.

*S 48.* Es gelte: $g, h, j \mathrel{I} O$; $p \perp g$; $q \perp j$; $v \mathrel{I} P = p\,g$; $v \perp k = g\,h\,j$. Aus $v \mathrel{I} Q = q\,j$ folgt, daß es $r$ mit $r = p\,h\,q$ gibt und umgekehrt. (Lotensatz.) (Fig. 19.)

(I) Es gelte unter den angegebenen Voraussetzungen $v \mathrel{I} Q = q\,j$. Es gibt $g'; j'$ mit $g' = P\,v = g\,p\,v$; $j' = Q\,v = j\,q\,v$; $g', j' \perp v$. Damit wird $p\,h\,q = v\,g'\,g\,h\,j\,j'\,v = v\,g'\,k\,j'\,v = g'\,k\,j'$ wegen $g', k, j' \perp v$ eine Gerade $r$.

(II) Sei umgekehrt $p\,h\,q = r$. Es gibt $g'; j'; v'$ mit $g' = P\,v = g\,p\,v$; $j' \perp v$; $j' \mathrel{I} Q = j\,q$; $v' = j'\,j\,q = j'\,Q$; $v' \perp j'$. Nach *A 5* und *S 5* gibt es zu $g', k, j' \perp v$ ein $l$ mit $l = g'(g\,h\,j)\,j'$; $l \perp v$. Sei $l\,v = R$. Damit ist $r = p\,h\,q = v\,g'\,g\,h\,j\,j'\,v' = v\,l\,v' = R\,v'$. Es gilt also $v' \mathrel{I} R$. Aus $R \mathrel{I} v, v'$; $v, v' \perp j'$ folgt nach *A 17* $v = v'$, also $Q \mathrel{I} v$.

*D 11.* Es seien $O; u; v$ mit $u, v \mathrel{I} O$ gegeben. Unter einer durch $O; u; v$ bestimmten *Halbdrehung* $H = H(O; u; v)$ verstehen wir die folgende Abbildung der Punkte und Geraden von $\mathfrak{G}$ auf sich (Fig. 20): Zu $p$ gibt es $l_p$ mit $l_p \mathrel{I} O$; $l_p \perp p$ und hiermit $F_p = p\,l_p$. Dann ordnen wir der Geraden $p$ das Bild $p^*$ zu durch $p^* \mathrel{I} F_p$; $p \perp l_p^*$; $l_p^* = l_p\,u\,v$. Dem Punkt $P$ ordnen wir das Bild $P^*$ zu durch $P^* = q\,g^*$, wo $g \mathrel{I} O, P$; $q \mathrel{I} P$; $q \perp g^* = g\,u\,v$ ist[14]).

Die Abbildung der Bildelemente bei $H$ auf die Urbilder bezeichnen wir als *inverse Halbdrehung* $H^{-1}$.

*S 49.* Aus $p \mathrel{I} O$ folgt $p^* = p\,u\,v$.

Denn aus $p \mathrel{I} O$ folgt $l_p = p\,O$; $F_p = O$. Damit wird $p^* = O\,l_p^* = O\,l_p\,u\,v = p\,u\,v$.

*S 50.* Es ist $l_p^* = l_{p^*}$.

Nach *D 11* ist $l_p^* \perp p^*$; $l_p^* \mathrel{I} O$. $l_{p^*}$ bedeutet $l_{p^*} \perp p^*$; $l_{p^*} \mathrel{I} O$. Aus *A 17* folgt die Behauptung.

*S 51.* Aus $p = q$ folgt $p^* = q^*$; aus $P = Q$ folgt $P^* = Q^*$.

(I) Die erste Behauptung ergibt sich aus *D 11*, da bei der Bestimmung von $p^*$ aus $p$ nur eindeutige Operationen angewandt werden.

(II) Bei der Bestimmung von $P^*$ aus $P$ ist $g$ durch $g \mathrel{I} O$, $P$ nicht notwendig eindeutig festgelegt. Die weiteren Operationen sind wieder eindeutig. Wir zeigen: Aus $g, h \mathrel{I} O, P$; $q, r \mathrel{I} P$; $q \perp g^* = g\,u\,v$; $r \perp h^* = h\,u\,v$ folgt $P^* = g^*\,q = Q^* = h^*\,r$, womit dann *S 51* bewiesen sein wird. — Es gibt nach *A 4* $s; t$ mit $s = q\,g\,h$; $t = g\,h\,r$. Aus $g^*\,h^* = g\,u\,v\,v\,u\,h = g\,h$ folgt dann $q\,g^* = s\,h^*$; $g^*\,t = h^*\,r$. Wegen $q \perp g^*$; $h^* \perp r$ gilt also auch $s \perp h^*$; $g^* \perp t$. Wegen $q, r, s, t \mathrel{I} P$ folgt aus *A 17*: $t = q$; $r = s$, also $P^* = g^*\,q = h^*\,s = h^*\,r = Q^*$.

*S 52.* Ist bei einer Halbdrehung $H(O; u; v)$: $u = l_v = O\,v$, also $u \perp v$, so folgt $P^* = O$; $p^* \mathrel{I} O$. Ist bei der Halbdrehung $u \curvearrowright l_v = O\,v$ und ist $\mathfrak{G}$ nicht quasielliptisch, so gilt für alle $P$: $P^* \bigcirc O$ und für alle $p$: $p^*\,l_{p^*} \bigcirc O$.

(I) Aus $u \perp v$ oder $u\,v = O$ folgt gemäß *D 11* $l_p^* = l_p\,O$ oder $l_p^* \perp l_p$. Aus $p^*, l_p \mathrel{I} F_p$; $p^*, l_p \perp l_{p^*}$ folgt nach *A 17* $p^* = l_p$, also $p^* \mathrel{I} O$. Ebenso folgt $P^* = O$.

(II) Aus $u \curvearrowright O\,v$; $l_p\,l_p^* = u\,v$ folgt nach *S 45* $l_p^*\,O \curvearrowright l_p$. Damit ist auch $p^* \curvearrowright l_p$; denn andernfalls würde das Paar $F_p; l_p^*$ einer quasielliptischen Ebene angehören, was wir ausgeschlossen haben. Mit $p^* \curvearrowright l_p$ folgt nach *S 23* $O \bigcirc l_p^*\,p^*$. Da wir jedes $P$ als ein $F_p$ mit einem geeigneten $p$ auffassen können, folgt durch dieselben Überlegungen auch $P^* \bigcirc O$.

*D 12.* Eine Halbdrehung $H(O; u; v)$ heißt *singulär*, wenn $u \curvearrowright l_p = O\,v$ ist. Eine nichtsinguläre Halbdrehung heißt auch *regulär*.

*S 53.* Wenn $H(O; u; v)$ regulär ist, folgt aus $p \neq q$ auch $p^* \neq q^*$ und aus $P \neq Q$ auch $P^* \neq Q^*$.

(I) Aus $p \neq q$ folgt $p^* \neq q^*$. (a) Es sei $l_p \neq l_q$. Dann ist auch $l_p^* \neq l_q^*$ oder nach *S 50* $l_{p^*} \neq l_{q^*}$. Aus *A 17* folgt dann $p^* \neq q^*$. (b) Es sei $l_p = l_q = l$ (Fig. 21). Mit $p \neq q$ ist auch $l\,p = F_p \neq l\,q = F_q$. $p^* = q^*$ führt auf einen Widerspruch: Es würde $p^* = q^* \mathrel{I} F_p, F_q$ folgen, also $p^* = q^* \curvearrowright l$. Nach *S 18* würde damit $l \curvearrowright O\,l^* = O\,v\,u\,l$ oder $O\,v\,u \subset \mathfrak{N}$ gelten, während $O\,v\,u \notin \mathfrak{N}$ vorausgesetzt war.

(II) Aus $P \neq Q$ folgt $P^* \neq Q^*$. (a) Aus $P \neq O$ folgt $P^* \neq O^* = O$. Wäre nämlich $P^* = O$, so würde $g \curvearrowright q$ folgen und wegen $O = P^* = q\,g^* = q\,g\,u\,v$: $O\,v \curvearrowright u$. (b) Aus $P \neq Q$; $P, Q \neq O$ folgt $P^* \neq Q^*$. Wir unterscheiden zwei Fälle: (b a) Es gibt $g; h$ mit $g \mathrel{I} O, P$; $h \mathrel{I} O, Q$; $h \nmid P$. Aus $P^* = Q^*$ folgt dann $h \mathrel{I} P$, also ein Widerspruch. Denn nach *D 11* sei $P^* = q\,g^*$; $Q^* = r\,h^*$; $q \mathrel{I} P$; $r \mathrel{I} Q$. Wegen $q, g^*, h^* \mathrel{I} P^* = Q^*$ ist $q\,g^*\,h^* = q\,g\,h$ eine Gerade. Wegen $u \not\curvearrowright O\,v$ ist $q \not\curvearrowright g$ und damit nach *S 20* mit $q, g \mathrel{I} P$: $h \mathrel{I} P$. (b b) Es gibt $g$ mit $g \mathrel{I} O, P, Q$.

Die Annahme $P^* = Q^*$ führt auf einen Widerspruch: Denn mit der oben eingeführten Bezeichnung folgt aus $P^* = Q^*$: $q\,g^* = r\,g^*$, also $q = r$; $q \mathrel{I} P, Q$. Wegen $P \neq Q$ heißt dies $q \curvearrowright g$. Dies führt aber wegen *S 18* auf $u \curvearrowright O\,v$.

*S 54.* Aus $g \mathrel{I} O$; $p \perp g$ folgt $g^* \mathrel{I} O$; $p^* \perp g^*$ und umgekehrt.

Aus $g \mathrel{I} O$; $p \perp g$ folgt $g^* = g\,u\,v \mathrel{I} O$ gemäß *S 4*; nach *A 17* ist $g = l_p$, also $g^* = l_p^* = l_{p^*} \perp p^*$. Gilt umgekehrt $g^* \mathrel{I} O$; $p^* \perp g^*$, so folgt $g = g^*\,v\,u \mathrel{I} O$ aus *S 4*. Damit ist $l_p^* = g^*$; $l_p = g$, also $g \perp p$.

*S 55.* Aus $P \mathrel{I} p$ folgt $P^* \mathrel{I} p^*$. Ist die Halbdrehung regulär, so folgt aus $P^* \mathrel{I} p^*$: $P \mathrel{I} p$.

Wir wenden den Lotensatz *S 48* an (Fig. 22): Es gilt $l_p, g, g^* \mathrel{I} O$; $p \perp l_p$; $q \perp g^*$; $p^* \mathrel{I} F_p = l_p\,p$; $p^* \perp l_p\,g\,g^*$; $l_p\,u\,v = l_p^* = l_{p^*}$. Dann ist $p^* \mathrel{I} P^* = g^*\,q$ äquivalent mit: $p\,g\,q$ ist eine Gerade (Lotensatz). Es gilt noch $P \mathrel{I} g, q$. —

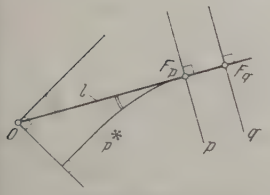

Fig. 21. *S 53.*

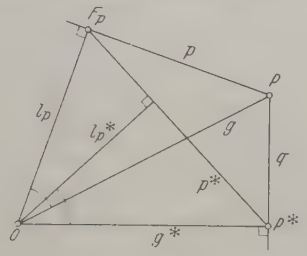

Fig. 22. *S 55.*

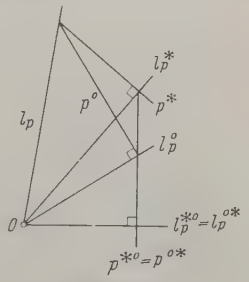

Fig. 23. *S 56.*

Wenn nun $P \mathrel{I} p$, dann ist wegen $p, g, q \mathrel{I} P$ nach *A 4* $p\,g\,q$ eine Gerade, es gilt also $P^* \mathrel{I} p^*$. Wenn umgekehrt $p^* \mathrel{I} P^*$, also $p\,g\,q$ eine Gerade ist, so folgt bei regulärer Halbdrehung, d.h. $g \curvearrowright q$: $p \mathrel{I} P$ nach *S 20*.

*S 56.* Wir betrachten die Menge der Halbdrehungen und der regulären inversen Halbdrehungen. Je zwei dieser Abbildungen sind vertauschbar.

(I) Es seien beide Halbdrehungen direkt (Fig. 23). Wir bezeichnen die Bilder von $P$; $p$ bei diesen Abbildungen mit $P^*$; $p^*$ und $P^\circ$; $p^\circ$. Wir zeigen: $P^{*\circ} = P^{\circ *}$; $p^{*\circ} = p^{\circ *}$. Dies folgt mit *S 48*: Es ist $l_p^*, l_p, l_p^\circ \mathrel{I} O$; $l_p^* \perp p^*$; $l_p \perp p^\circ$; $p^{*\circ} \mathrel{I} F_p^* = l_p^*\,p^*$; $p^{*\circ} \perp l_p^{*\circ} = (l_p\,u\,v)\,u^\circ\,v^\circ = l_p^*\,l_p\,l_p^\circ$. Wegen $l_p, p^*$, $p^\circ \mathrel{I} F_p = l_p\,p$ folgt aus *S 48* $p^{*\circ} \mathrel{I} F_p^\circ = l_p^\circ\,p^\circ$. Es gilt $l_p^{*\circ} = l_p^*\,l_p\,l_p^\circ = l_p^{\circ *}$. Aus $p^{*\circ}, p^\circ * \perp l_p^{*\circ} = l_p^{\circ *}$; $p^{*\circ}, p^{\circ *} \mathrel{I} F_p^\circ$ folgt nach *A 17* $p^{*\circ} = p^{\circ *}$. Damit ist auch $F_p^{*\circ} = F_p^{\circ *}$. Da sich jedes $P$ in der Form $P = F_p = p\,l_p$ schreiben läßt mit $l_p \mathrel{I} O$, $P$, gilt damit auch $P^{*\circ} = P^{*\circ}$.

(II)[15]. Wir betrachten eine direkte und eine inverse reguläre Halbdrehung $H_1$ und $H_2^{-1}$. Nach *S 51*, *S 53* handelt es sich um eineindeutige Abbildungen. Damit gilt, wegen (I): $H_1 H_2^{-1} = H_2^{-1} H_2 H_1 H_2^{\ 1} = H_2^{\ 1} H_1 H_2 H_2^{-1} = H_2^{-1} H_1$.

(III)[15]. Wir betrachten zwei inverse reguläre Halbdrehungen $H_1^{-1}, H_2^{-1}$. Es gilt, ähnlich wie unter (II): $H_1^{-1} H_2^{-1} = H_1^{-1} H_2^{-1} H_1 H_2 H_2^{-1} H_1^{-1} = H_1^{-1} H_2^{-1} H_2 H_1 H_2^{-1} H_1^{\ 1} = H_2^{-1} H_1^{-1}$.

[15]) Beweis nach einer Mitteilung von R. Guse.

*S 57.* Es sei $\mathfrak{G}$ nicht quasielliptisch und es mögen *A 1* bis *A 9*; *A 14*; *A 17* gelten. Diese Voraussetzungen sind insbesondere erfüllt, wenn für $\mathfrak{G}$ die Axiome *A 1* bis *A 11* gelten. Dann gilt der Satz von PAPPOS-PASCAL in folgender Formulierung (Fig. 24):

Aus $g, g', r_i \mathrm{I} O$; $g \nparallel g'$; $P_i \mathrm{I} g$; $P_i' \mathrm{I} g'$; $r_l \perp g_{ik}, g_{ki}$ ($i, k, l$ eine Permutation von 1, 2, 3); $g_{13} \mathrm{I} P_1, P_3'$; $g_{31} \mathrm{I} P_3, P_1'$; $g_{23} \mathrm{I} P_2, P_3'$; $g_{32} \mathrm{I} P_3, P_2'$; $g_{21} \mathrm{I} P_2, P_1'$; $g_{12} \mathrm{I} P_2'$; $P_1' \not\mathrm{I} O$; $g_{23} \nparallel g'$ folgt $g_{12} \mathrm{I} P_1$.

Beweis[16]). Daß die genannten Voraussetzungen eine Folge von *A 1* bis *A 11* sind, folgt aus *S 8*, *S 41*, *S 43*, *S 47*. Den Beweis des Satzes von PAPPOS-PASCAL führen wir unter Verwendung von Halbdrehungen: Es seien $H_1 = H(O; g'; r_3)$; $H_2 = H(O; g; r_3)$; $H_3 = H(O; g; r_1)$; $H_4 = H(O; g'; r_1)$; $H_5 = H(O; g'; r_2)$; $H_6 = H(O; g; r_2)$. Wir zeigen, daß die Halbdrehungen $H_2, H_4, H_6$ auf Grund unserer Voraussetzungen regulär sind:

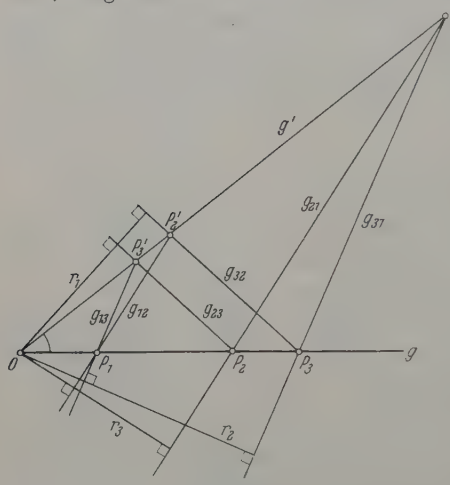

Fig. 24. *S 57.*

$g \nparallel l_{r_2} = O r_3$ und $g \nparallel l_{r_2} = O r_2$ folgt aus $P_1' \not\mathrm{I} O$. Wäre nämlich etwa $g \frown O r_3$, so würde mit $P_2 \mathrm{I} g_{21}, g$; $r_3 \perp g_{21}, O r_3$; $g \mathrm{I} O = r_3(O r_3)$ gelten, da der quasielliptische Fall ausgeschlossen ist: $g_{21} \frown g$. Hiermit und mit $g \nparallel g'$ würde nach *S 24* folgen: $O \bigcirc P_1'$, entgegen der Voraussetzung. Also ist $g \nparallel O r_3$. Ebenso folgt $g \nparallel O r_2$.

$g' \frown O r_1$ endlich würde, da der quasielliptische Fall ausgeschlossen ist, $g' \frown g_{23}$ zur Folge haben, entgegen der Voraussetzung.

Durch die Folge der Halbdrehungen $H^* = H_1 H_2^{-1} H_3 H_4^{-1} H_5 H_6^{-1}$ wird $P_1'$ in $P_1$ übergeführt. Dasselbe wird, da wir *S 56* anwenden können, durch die Folge $H^{**} = H_5 H_6^{-1} H_3 H_4^{-1} H_1 H_2^{-1}$ geleistet. Durch $H^{**}$ wird $P_1'$ nacheinander in $P_3$, $P_2'$ und $P_1$ übergeführt. Dies bedeutet, daß $P_1$ mit der wegen *A 17* durch $g_{12} \mathrm{I} P_2'$; $g_{12} \perp r_3$ eindeutig bestimmten Geraden $g_{12}$ inzidiert, w. z. b. w.

## 5. Die euklidische Ebene mit Nachbarelementen. Folgerungen mit A 10 und A 11.

Wir erklären die Relation „parallel" für zwei Geraden durch die Eigenschaft, daß die Geraden zwei nichtbenachbarte Lote gemeinsam haben sollen. Zwei parallele Geraden haben dann alle Lote gemeinsam, die Relation „parallel" wird transitiv. Es gilt der affine kleine Satz von DESARGUES. *A 10* hat zur Folge, daß für ein Viereck, in dem die Seiten in drei Ecken orthogonal sind, auch im vierten Eckpunkt die Seiten orthogonal werden.

[16]) Vgl. J. HJELMSLEV[1]) 5. Mitt. S. 30.

Damit gibt es dann durch einen Punkt zu einer Geraden genau eine Parallele. Auf Grund von *A 11* hat eine Gerade, die eine von zwei Parallelen eindeutig schneidet, auch mit der anderen einen Schnittpunkt. Hiermit bilden dann unsere Punkte und Geraden eine affine Ebene mit Nachbarelementen, wie wir sie an anderer Stelle eingeführt haben. Wegen der Gültigkeit des Satzes von PAPPOS-PASCAL und des kleinen Satzes von DESARGUES können wir unsere Ebene als affine Ebene über einem $H$-Ring beschreiben. Für diesen Ring gilt auf Grund der Eigenschaften der Orthogonalitätsrelation, daß 2 nicht Nullteiler ist und eine Form $u^2 + k\,v^2$ existiert, die nur für den Fall, daß $u$ und $v$ beide Nullteiler sind, einen Nullteiler darstellt.

**5.1.** Eigenschaften der Relation „parallel".

*D 13.* Die Relation „*g parallel h*", $g \parallel h$, ist erfüllt, wenn es $j; k$ gibt mit $j, k \perp g, h$; $j \varnothing k$. Die Negation wird mit $g \nparallel h$ bezeichnet.

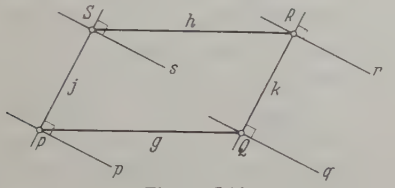

Fig. 25. *S 61.*

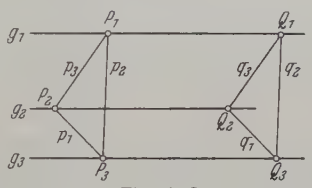

Fig. 26. *S 63.*

*S 58.* Aus $g \parallel h$; $l \perp g$ folgt $l \perp h$.

Es gibt $j; k$ mit $j, k \perp g, h$; $j \varnothing k$. Nach *A 5* ist $j\,k\,l$ eine Gerade. Nach *S 46* folgt wegen $j, k \perp h$; $j \varnothing k$: $l \perp h$.

*S 59.* Aus $g \parallel h$; $P \mathrel{I} g, j$; $Q \mathrel{I} h, j$; $g \not\asymp j$ folgt $h \not\asymp j$.

Nach *S 58* gilt für $l = P\,g$: $l \perp g, h$. Wäre $h \asymp j$, so würde nach *S 18* folgen $g \asymp j$.

*S 60.* Aus $g \parallel h$; $h \parallel j$ folgt $g \parallel j$.

Es gibt $j', k'$ mit $j', k' \perp g, h$; $j' \varnothing k'$. Nach *S 58* gilt auch $j', k' \perp j$, also $g \parallel j$.

*S 61.* Aus $P\,Q\,R = S$; $g \mathrel{I} P, Q$; $k \mathrel{I} Q, R$; $j \mathrel{I} P$; $j \parallel k$; $h \mathrel{I} R$; $h \parallel g$ folgt $j, h \mathrel{I} S$ (Fig. 25).

Wir bestimmen $p; q; r$ durch $p = j\,P$; $q = Q\,k$; $r = k\,R$ mit $p, q, r \perp j, k$. Damit wird nach *A 5* $p\,q\,r$ eine Gerade $s$ mit $s \perp j, k$. Hiermit ist $P\,Q\,R = j\,p\,q\,k\,k\,r = j\,p\,q\,r = j\,s = S$, also $S \mathrel{I} j$. Ebenso folgt $S \mathrel{I} h$.

*S 62.* Aus $g \parallel h$; $j \parallel k$; $P \mathrel{I} g, j$; $Q \mathrel{I} k, g$; $R \mathrel{I} h, k$; $S \mathrel{I} j, h$; $g \not\asymp j$ folgt $P\,Q\,R = S$.

Wir setzen $P\,j = p$; $Q\,k = q$; $R\,k = r$ mit $p, q, r \perp j, k$. Damit gibt es $s$ mit $s = p\,q\,r$; $s \perp j, k$. Damit wird $P\,Q\,R = j\,p\,q\,r = j\,s = S'$; $S' \mathrel{I} j$. Ebenso erschließt man mit $P\,g = p'$; $Q\,g = q'$; $R\,h = r'$ und $p'\,q'\,r' = s'$; $s' \perp g, h$: $P\,Q\,R = s'\,h = S'$, also $S' \mathrel{I} h$. Mit $g \not\asymp j$ gilt nach *S 59* auch $h \not\asymp j$, also $S' = S$.

*S 63.* Es gilt der affine kleine Satz von DESARGUES in der Form (Fig. 26): Aus $P_i, Q_i \mathrel{I} g_i$; $p_i \parallel q_i$; $P_i, P_k \mathrel{I} p_l$ $(i, k, l$ eine Permutation von $1, 2, 3)$; $g_1 \parallel g_2 \parallel g_3$; $q_1 \mathrel{I} Q_2, Q_3$; $q_3 \mathrel{I} Q_1, Q_2$; $q_2 \mathrel{I} Q_1$; $p_1, p_3 \not\asymp g_2$; $P_1 \varnothing P_3$ folgt $q_2 \mathrel{I} Q_3$.

Denn wegen *S 62* ist $P_1 Q_1 = P_2 Q_2$; $P_2 Q_2 = P_3 Q_3$, als $P_1 Q_1 = P_3 Q_3$, woraus nach *S 61* die Behauptung folgt.

**5.2.** Der Satz vom Rechteck. Folgerungen aus A10.

*S64.* Aus $P\,Q\,R = S$; $g \mathrel{I} P, Q$; $h \mathrel{I} R, S$; $P \varnothing Q$ folgt $g \parallel h$.

Es gibt $p$; $q$ und $r$; $s$ mit $p = P\,g$; $q = Q\,g$; $p, q \perp g$ und $r = R\,h$; $s = S\,h$; $r, s \perp h$. Hiermit wird aus $P\,Q\,R = S$: $p\,q\,r = s$. Mit $P \varnothing Q$ ist auch $p \varnothing q$, und damit folgt aus *S46* $r, s \perp g$. Wegen $p \varnothing q$ ist auch $r \varnothing s$, also $g \parallel h$.

*S65.* Aus *A10* folgt: Aus $r \perp p, q$; $s \perp p$ folgt $s \perp q$, also $p \parallel q$. (Satz vom Rechteck: In einem Viereck mit drei „rechten Winkeln" ist auch der vierte ein „rechter").

(I) Wir sagen, daß die Elemente $g$; $h$; $g'$; $h'$ ein ordinäres Rechteck bilden, wenn sie die in *A10* angegebenen Eigenschaften haben. Wir zeigen: *S65* ist richtig, wenn es ein ordinäres Rechteck $g$; $h$; $g'$; $h'$ gibt mit $g \perp p$. Beweis: Aus $g', h', p \perp g$ folgt nach *A5*, daß $g'\,h'\,p$ eine Gerade ist; hieraus folgt mit $g' \varnothing h'$ (dies folgt aus $g\,g' \varnothing g\,h'$) und $g', h' \perp h$ nach *S46* $p \perp h$. Aus $g, h, r \perp p$; $g \varnothing h$ (dies gilt wegen $g\,g' \varnothing h\,g'$); $g, h \perp g', h'$ folgt ebenso $r \perp g', h'$. Aus $g, h, s \perp p$; $g \varnothing h$; $g, h \perp g', h'$ folgt ebenso $s \perp g', h'$. Aus $g', h', q \perp r$; $g' \varnothing h'$; $g', h' \perp s$ folgt endlich $s \perp q$.

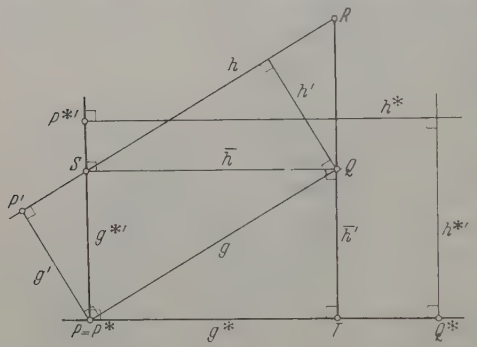

Fig. 27. *S65.*

(II) Wir bezeichnen[17]) (Fig. 27) die Elemente des nach *A10* existierenden ordinären Rechtecks mit $g^*, h^*, g^{*\prime}; h^{*\prime}; P^* = g^*\,g^{*\prime}; Q^* = g^*\,h^{*\prime}; P^{*\prime} = g^{*\prime}\,h^*$. Wir müssen nun noch zeigen, daß es zu jedem $g \mathrel{I} P^*$ ein ordinäres Rechteck mit $g$ als Seite gibt. Sei $P \neq P^*$. Es gibt $Q$ mit $Q \mathrel{I} g$; $Q \varnothing P$. Es gibt $\bar{h}; \bar{h}'$ mit $\bar{h}, \bar{h}' \mathrel{I} Q$; $\bar{h} \perp g^{*\prime}$; $\bar{h}' \perp g^*$. Nach (I) ist dann $\bar{h} \perp \bar{h}'$; $Q = \bar{h}\,\bar{h}'$. Sei $S = g^{*\prime}\,\bar{h}$; $T = g^*\,\bar{h}'$. Nach *S62* ist $P\,T\,Q = S$. Sei $R = Q\,T\,Q$. Aus $P\,Q\,R = S$ und $h$ mit $h \mathrel{I} R, S$ folgt nach *S64* $h \parallel g$. Für $g' = P\,g$; $h' = Q\,g$ gilt also $g', h' \perp g, h$. Wenn $P' = g'\,h \varnothing P$ gilt, sind wir fertig. Wenn dagegen $P' \bigcirc P$, also $g \bigcirc h$, so heißt dies $g \curvearrowright g^*$ oder $g \curvearrowright g^{*\prime}$. Wir konstruieren daher zunächst zu $g^\circ$ mit $g^\circ \mathrel{I} P$; $g^\circ \curvearrowright g^*, g^{*\prime}$ ein ordinäres Rechteck. Bezogen auf dies Rechteck erschließen wir dann auch für $g$ die Existenz eines ordinären Rechtecks.

*S66.* Zu $P$; $g$ gibt es genau ein $h$ mit $h \mathrel{I} P$; $h \parallel g$.

Sei $j$ das Lot von $P$ auf $g$ und $h = P\,j$. Nach *S65* ist $h \parallel g$. Die Eindeutigkeit folgt aus *A2*.

**5.3.** Die affine Inzidenzebene mit Nachbarelementen.

*S67.* Die Punkte und Geraden von $\mathfrak{G}$ bilden mit den Relationen „inzident" und „parallel" eine affine Inzidenzebene mit Nachbarelementen, wie sie in

[17]) Beweis nach einer Anregung von G. EHLERS.

einer anderen Arbeit[5]) durch die dort in *S3.6* aufgeführten Eigenschaften definiert wurde.

Wir zeigen, daß die a. a. O. unter *S3.6* zusammengestellten Eigenschaften gelten: (a) Zu $P; Q$ gibt es $g$ mit $g \mathrel{I} P, Q$. Dies folgt aus *A1*. (b) Es gibt drei nichtbenachbarte Punkte, deren Verbindungsgeraden nicht Schmiegeraden sind. Dies folgt aus *A10*, *S23*. (c) Zu $g$ gibt es $P; Q$ mit $P, Q \mathrel{I} g$; $P \varnothing Q$. Dies folgt aus *S32*. (d) Aus $P \bigcirc Q$; $Q \bigcirc R$ folgt $P \bigcirc R$. Dies folgt aus *S28*. (e) Aus $g \bigcirc h$; $h \bigcirc j$ folgt $g \bigcirc j$. Dies folgt aus *S33*. (f) Aus $P \bigcirc Q$; $g \mathrel{I} P, R$; $h \mathrel{I} Q, R$; $g \varnothing h$ folgt $R \bigcirc P, Q$. Dies folgt aus *S22*.

(g) Aus $g \bigcirc h$; $P \mathrel{I} g, j$; $Q \mathrel{I} h, j$; $j \varnothing g$ folgt $P \bigcirc Q$. Dies folgt mit *D7* aus *S22*. (h) Aus $g \parallel h$; $h \parallel j$ folgt $g \parallel j$. Dies folgt aus *S60*. (i) Zu $g \parallel h$; $P \mathrel{I} g, j$; $j \varnothing g$ gibt es $Q$ mit $Q \mathrel{I} h, j$; $j \varnothing h$. Dies folgt aus *S58*, *A11* und *S59*. (j) Zu $P; g$ gibt es genau ein $h$ mit $h \parallel g, h \mathrel{I} P$. Dies folgt aus *S66*.

*S68*. In der in *S67* genannten affinen Inzidenzebene mit Nachbarelementen gelten der affine kleine Satz von Desargues und der affine Satz von Pappos-Pascal in der Formulierung, wie sie a. a. O.[5]) gegeben ist. Wie wir in jener Arbeit[5]) zeigten, läßt sich unsere Ebene damit als affine Ebene über einem $H$-Ring beschreiben.

Ein *H-Ring* $\boldsymbol{R}_H$ ist dabei ein kommutativer Ring mit Einselement, in dem jeder Nichtnullteiler invertierbar ist und von zwei Nullteilern wenigstens einer den anderen teilt. Die Punkte $P \mathrel{\mathfrak{G}}$ sind damit eineindeutig den geordneten Elementpaaren $(x; y)$ von $\boldsymbol{R}_H$ zugeordnet, und die Geraden $g \mathrel{\mathfrak{G}}$ sind eineindeutig den homogenen (d. h. bis auf einen Nichtnullteilerfaktor festgelegten) geordneten Elementtripeln $(u; v; w)$ mit $u \notin \boldsymbol{N}$ oder $v \notin \boldsymbol{N}$ zugeordnet, wobei $\boldsymbol{N}$ die Menge der Nullteiler in $\boldsymbol{R}_H$ bezeichnet. $P \mathrel{I} g$ wird durch $u\,x + v\,y + w = 0$ beschrieben.

$P \bigcirc Q$ gilt, wenn $(x; y)$ und $(x'; y')$ die zugehörigen Koordinaten sind, genau dann, wenn $x - x', y - y' \in \boldsymbol{N}$ ist. Sind $(u; v; w)$ und $(u'; v'; w')$ die Koordinaten von $g$ und $g'$, so gilt $g \bigcirc g'$ genau dann, wenn $v\,w' - w\,v'$, $w\,u' - u\,w'$, $u\,v' - v\,u' \in \boldsymbol{N}$ ist. $g \parallel g'$ gilt genau dann, wenn $u\,v' - v\,u' = 0$ ist.

All dies besagen die a. a. O.[5]) durchgeführten Untersuchungen.

### 5.4. Spezielle Eigenschaften des $H$-Rings[18]).

*S69*. Die Punkte $P_0$; $P_a$; $P_b$ mögen die Koordinaten $(0; 0)$; $(a; 0)$; $(b; 0)$ haben und $P_{a-b}$ die Koordinaten $(a + b; 0)$. Dann gilt $P_{a+b} = P_a\,P_0\,P_b$. Umgekehrt folgt aus $P' = P_a\,P_0\,P_b$, daß $P'$ die Koordinaten $(a + b; 0)$ hat.

Es seien $P_1'$; $P_b^*$ die Punkte mit den Koordinaten $(0; 1)$; $(b; 1)$. Mit *S62* folgt dann leicht $P_0\,P_b = P_1'\,P_b^*$ und $P_1'\,P_b^* = P_a\,P_{a\cdot b}$, also $P_{a\cdot b} = P_a\,P_0\,P_b$. Die Umkehrung folgt mit *S61*.

*S70*. Für $2 \in \boldsymbol{R}_H$ gilt $2 \notin \boldsymbol{N}$.

Wegen *S68*, *S69* würde $2 \in \boldsymbol{N}$ bedeuten, wenn $P_0$, $P_1$, $P_2$ bzw. die Koordinaten $(0; 0)$, $(1; 0)$, $(2; 0)$ haben: $P_0 \bigcirc P_2 = P_1\,P_0\,P_1$ mit $P_1 \varnothing P_0$. Es gibt $g$ mit $g \mathrel{I} P_0, P_1$ und $h = g\,P_1$; $h \perp g$. Es gibt $Q$ mit $Q \mathrel{I} h$; $Q \varnothing P_1$ und $j$ mit

[18]) Vgl. F. Bachmann, Grundlagen der Geometrie[3]).

$j \mathrel{I} Q$, $P_0$. Es ist $Q \varnothing P_0$. Für $j' = h\,j\,h$ gilt $j' \mathrel{I} Q$, $P_2 - h\,P_0\,h$. Aus $P_0 \bigcirc P_2$ würde mit *S22* folgen $j' = h\,j\,h \bigcirc j$ und hieraus, da der quasielliptische Fall ausgeschlossen ist, nach *A9* $j \curvearrowright h$, was im Widerspruch steht zu $P_0 \varnothing P_1$.

*S71.* Wir wählen als Achsen unseres Bezugssystems in der Ebene zwei orthogonale Geraden $g; g'$. Durch $(0; 1; 0)$ und $(1; 0; 0)$ sollen also orthogonale Geraden repräsentiert werden. $P$ und $Q$ mögen die Koordinaten $(a; b)$ und $(c; d)$ haben. Dann hat $P^* = Q\,P\,Q$ die Koordinaten $(a^*; b^*) = (2c - a;\ 2d - b)$.

Zum Beweis betrachten wir $g_a; g_c; g_{a^*}$ mit $g_a, g_c, g_{a^*} \perp g$; $g_a \mathrel{I} P$; $g_c \mathrel{I} Q$; $g_{a^*} \mathrel{I} P^*$. (I) Es ist für $g_a^*$ mit $g_a^* = g_c\,g_a\,g_c$: $g_a^* = Q\,g_a\,Q$. Dazu beschreiben wir $Q$ in der Form $Q = h\,g_c$. Mit *S65* ist dann $h \perp g_a$, woraus die Behauptung folgt. (II) Es gilt $g_a^* \mathrel{I} P^*$; $g_a^* \perp g$. Das folgt aus *S12* und *S5*. Wegen *A17* gilt damit $g_a^* = g_{a^*}$. Die Punkte $P_a = g\,g_a$; $P_c = g\,g_c$; $P_{a^*} = g\,g_{a^*}$ haben die Koordinaten $(a; 0)$; $(c; 0)$; $(a^*; 0)$. Es ist $P_{a^*} = P_c\,P_a\,P_c = P_c(P_a\,P_c\,P_0)\,P_0 = P_c(P_0\,P_c\,P_a)\,P_0 = (P_c\,P_0\,P_c)\,P_0(P_0 P_a P_0)$. Dies bedeutet nach *S69*: $a^* = 2c - a$. Ebenso folgt $b^* = 2d - b$.

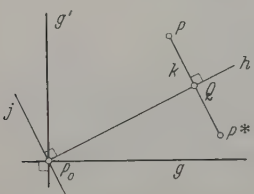

Fig. 28. *S72.*

*S72.* Die Koordinatenachsen $g; g'$ seien orthogonal. Dann gibt es in $\boldsymbol{R}_H$ ein Element $k$ so, daß die Form $u^2 + k\,v^2$ genau dann Nullteiler ist, wenn $u, v \in \boldsymbol{N}$ gilt. Zwei durch $(u; v; w)$ und $(u'; v'; w')$ repräsentierte Geraden sind genau dann orthogonal, wenn $u\,u' + k\,v\,v' = 0$ ist[18]).

Es sei $h$ gegeben mit $h \mathrel{I} P_0 = g\,g'$; $h \curvearrowright g'$. Wir können die Koordinaten von $h$ in der Form $(c; 1; 0)$ ansetzen. Hiermit können wir die Gerade $j$ mit $j = h\,P_0$; $j \perp h$ (da wegen *A7* $j \curvearrowright g$ ist) durch $(1; f(c); 0)$ beschreiben.

(I) Hat $P$ die Koordinaten $(a; b)$, werden die Koordinaten für $P^* = h\,P\,h$ (Fig. 28):

$$(*) \quad \{(1 - c f(c))^{-1}(a + 2b f(c) + a c f(c));\ \ (1 - c f(c))^{-1}(-b - 2ac - b c f(c))\}.$$

Zum Beweis bestimmen wir $k$ mit $k \mathrel{I} P$; $k \perp h$ und $Q = k\,h$. Wegen $k \parallel j$; $k \mathrel{I} P$ wird $k$ repräsentiert durch $(1; f(c); -a - b f(c))$; damit finden wir für $Q$

$$\{(1 - c f(c))^{-1}(a + b f(c));\ -(1 - c f(c))^{-1} c (a + b f(c))\}.$$

Wegen $P - Q\,P\,Q = h\,P\,h$ erhalten wir hieraus nach *S71* für $P^*$ die Koordinaten (*).

Dabei ist $(1 - c f(c)) \neq \boldsymbol{N}$; denn aus $(1 - c f(c)) \in \boldsymbol{N}$ folgt die Existenz von $d$ mit $d \neq 0$; $d(1 - c f(c)) = 0$. Hiermit haben die orthogonalen Geraden $(c; 1; 0)$ und $(1; f(c); 0)$ außer $(0; 0)$ noch den Punkt $(d f(c); -d) \neq (0; 0)$ gemeinsam, entgegen *A2*.

(II) $\bar{h}$ mit $\bar{h} \mathrel{I} P_0$; $\bar{h} \curvearrowright g'$ werde durch $(d; 1; 0)$ repräsentiert. Nach *A4* ist $h\,g\,\bar{h} = \bar{h}\,g\,h$, also auch $h\,g\,\bar{h}\,P_1\,\bar{h}\,g\,h = \bar{h}\,g\,h\,P_1\,h\,g\,\bar{h}$. Wir nehmen als $P_1$

den Punkt mit den Koordinaten $(1;0)$ und berechnen die vorstehende Gleichung in Koordinaten unter Verwendung von $(*)$. Dann folgt hieraus

$$c\,f(d) = d\,f(c).$$

Dies muß für jede Wahl von $c$ und $d$ gelten. Setzen wir speziell $d = 1$, so erhalten wir

$$(**) \qquad c\,f(1) = f(c).$$

Dabei ist $f(1) \notin \boldsymbol{N}$; denn aus $f(1) \in \boldsymbol{N}$ folgt für die zu $(1;1;0) \not\frown g$, $g'$ orthogonale Gerade $(1; f(1); 0)$: $(1; f(1); 0) \frown g'$, entgegen $A\,7$.

Wir setzen $f(1) = -k$ und $c = \frac{u}{v}$; $f(c) = \frac{v'}{u'}$ mit $v, u' \notin \boldsymbol{N}$. Damit wird aus $(**)$:

$$(***) \qquad v\,v' + k\,u\,u' = 0.$$

Die Nebenbedingung $v, u' \notin \boldsymbol{N}$ ist durch geeignete Wahl der Bezeichnung offenbar immer zu erfüllen. Also kennzeichnet $(***)$ allgemein für ein Geradenpaar $h; j$ mit den Koordinaten $(u; v; 0)$; $(u'; v'; 0)$ die Orthogonalität. Auf Grund der Beziehungen zwischen Orthogonalität und Parallelität gilt diese Kennzeichnung nicht nur für Geradenpaare durch den Punkt $P_0$ sondern allgemein.

(III) Es sei $v^2 + k\,u^2 = c \in \boldsymbol{N}$. Dann folgt $u \in \boldsymbol{N}$. Denn aus $u \notin \boldsymbol{N}$ folgt, daß durch $(u; v; 0)$ und $(-v; k\,u; 0)$ zwei orthogonale Geraden $h; j$ repräsentiert werden. Es gibt $d$ mit $d \neq 0$; $d\,c = 0$. Dann haben $h; j$ außer $(0; 0)$ auch den Punkt $(d\,k\,u; d\,v) \neq (0; 0)$ gemeinsam, entgegen A2. Also gilt $u \in \boldsymbol{N}$. Ebenso folgt $v \in \boldsymbol{N}$.

Wir fassen unsere Ergebnisse zusammen in dem

Theorem. *Wir betrachten eine Gruppe $\mathfrak{G}$ mit einem vorgegebenen System von involutorischen Erzeugenden, welche dem Axiomensystem aus* **1.1** *genügen möge. Die in $\mathfrak{G}$ erklärten Geraden- und Punktspiegelungen interpretieren wir als Geraden und Punkte einer Ebene; wir nennen sie:* euklidische Ebene mit Nachbarelementen. *Dann gilt: Eine euklidische Ebene mit Nachbarelementen läßt sich als analytische Geometrie über einem H-Ring beschreiben.*

*Ein H-Ring $\boldsymbol{R}_H$ ist dabei ein kommutativer Ring mit Einselement, in welchem jeder Nullteiler invertierbar ist und von je zwei Nullteilern wenigstens einer den anderen teilt. Mit $\boldsymbol{N}$ bezeichnen wir das teilerlose Ideal der Nullteiler in $\boldsymbol{R}_H$.*

*Die analytische Beschreibung der euklidischen Ebene mit Nachbarelementen gestaltet sich folgendermaßen: Den Punkten entsprechen eineindeutig die geordneten Paare $(x; y)$ aus $\boldsymbol{R}_H$, den Geraden die homogenen (d.h. bis auf einen gemeinsamen Faktor $f \notin \boldsymbol{N}$ festgelegten) geordneten Elementtripel $(u; v; w)$ von $\boldsymbol{R}_H$ mit $u \notin \boldsymbol{N}$ oder $v \notin \boldsymbol{N}$. Die Inzidenz wird durch $u\,x + v\,y + w = 0$ beschrieben. Zwei Geraden mit den Koordinaten $(u; v; w)$ und $(u'; v'; w')$ sind genau dann orthogonal, wenn $v\,v' + k\,u\,u' = 0$ ist; die Parallelität wird durch $u\,v' - v\,u' = 0$ beschrieben.*

*Dabei ist $v^2 + k\,u^2$ mit $k \in \boldsymbol{R}_H$ eine definite binäre Form über $\boldsymbol{R}_H$; d.h. $u^2 + k\,v^2 \in \boldsymbol{N}$ ist gleichbedeutend mit $u, v \in \boldsymbol{N}$. Außerdem gilt $1 + 1 \notin \boldsymbol{N}$.*

*Wir erhalten eine Darstellung von* $\mathfrak{G}$ *als Bewegungsgruppe der analytischen Geometrie über* $\boldsymbol{R}_H$, *wenn wir jeder Geraden* $(u; v; w)$ *die Matrix*

$$(\dagger) \qquad \begin{pmatrix} \frac{v^2 - k u^2}{v^2 + k u^2} & -\frac{2 k u v}{v^2 + k u^2} & -\frac{2 k u w}{v^2 + k u^2} \\ -\frac{2 u v}{v^2 + k u^2} & -\frac{v^2 - k u^2}{v^2 + k u^2} & -\frac{2 v w}{v^2 + k u^2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*zuordnen und die hiervon erzeugte Gruppe betrachten.*

*Es gibt einen Homomorphismus der euklidischen Ebene mit Nachbarelementen in eine eindeutige euklidische Ebene. Dazu fassen wir die Klassen benachbarter Punkte und benachbarter Geraden zu* Großpunkten *und* Großgeraden *zusammen*[19]). *Dann nennen wir einen Großpunkt und eine Großgerade „inzident", wenn es unter den Repräsentanten einen Punkt und eine Gerade gibt, die inzidieren. Entsprechend führen wir die Relation „orthogonal" für Großgeraden ein. In der so definierten* Großgeometrie[19]) *ist jeder Großpunkt und jede Großgerade nur zu sich selber benachbart: Zu zwei verschiedenen Punkten gibt es also genau eine Verbindungsgerade und zu zwei verschiedenen Geraden höchstens einen Schnittpunkt. Die so gewonnene eindeutige euklidische (Groß-)Ebene läßt sich als analytische Geometrie über dem Restklassenkörper* $\boldsymbol{K} \simeq \boldsymbol{R}_H \boldsymbol{N}$ *beschreiben. Für* $\boldsymbol{K}$ *ist also Char* $(\boldsymbol{K}) \neq 2$ *und es gibt über* $\boldsymbol{K}$ *eine definite binäre Form* $v^2 - k u^2$; *letzteres läßt sich auch beschreiben als die Existenz eines Elements* $k$ *in* $\boldsymbol{K}$, *welches nicht Quadrat ist. Die eindeutige euklidische (Groß-)Ebene entspricht also den von* F. BACHMANN[18]) *durch die Axiome A 1, A 2, A 3, A 4, A 5, A 10, A 11 charakterisierten Ebenen. Ist* $\mathfrak{N}$ *die invariante Untergruppe der Nachbarbewegungen, so ist* $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ *isomorph zur Bewegungsgruppe der Großgeometrie.*

Der Beweis dieses Theorems, abgesehen von dem letzten Absatz, bildete den Gegenstand unserer Untersuchungen. Man sieht nun noch leicht ein, daß die Zuordnung der Matrizen zu den Geraden umkehrbar eindeutig ist. Auch zeigt man leicht, daß die durch $v v' - k u u' = 0$ beschriebene Eigenschaft „orthogonal" genau gleichbedeutend damit ist, daß die zugehörigen Matrizen vom Typ (†) kommutieren. Die Matrizen vom Typ (†) erzeugen also in der Tat eine zu $\mathfrak{G}$ isomorphe Gruppe.

Der im Anschluß daran beschriebene Übergang zur Großgeometrie ist jedenfalls möglich. Soweit es sich um affine Eigenschaften handelt, haben wir diesen Übergang in [5]) ausführlich beschrieben und auch gezeigt, daß der Koordinatenbereich der Großgeometrie von dem Restklassenkörper $\boldsymbol{K} \simeq \boldsymbol{R}_H \boldsymbol{N}$ gebildet wird. Man überlegt sich nun noch leicht, daß die obige Einführung der Relation „orthogonal" für Großgeraden genau der Restklassenbildung der Relation $v v' + k u u' = 0$ nach $\boldsymbol{N}$ entspricht.

Seine volle Bedeutung gewinnt unser Theorem aber erst durch das

Umkehrtheorem. *Es sei* $\boldsymbol{R}_H$ *ein H-Ring, für den 2 nicht Nullteiler ist, und es sei* $v^2 + k u^2$ *eine definite Form über* $\boldsymbol{R}_H$. *Es sei dann über* $\boldsymbol{R}_H$ *auf die oben an-*

[19]) Die Begriffe Großpunkt, Großgerade und Großgeometrie finden sich bei J. HJELMSLEV[1]) 3. Mitt. S. 35ff.

*gegebene Weise eine analytische Geometrie definiert, in der die Orthogonalität mit Hilfe der definiten Form erklärt ist. Jeder Geraden dieser Geometrie ordne man eine Matrix vom Typ* $(+)$ *zu. Die von diesen Matrizen erzeugte Gruppe genügt dann, mit eben diesen Matrizen als System von involutorischen Erzeugenden, dem Axiomensystem aus* **1.1**; *die analytische Geometrie über* $\boldsymbol{R}_H$ *bildet also eine euklidische Ebene mit Nachbarelementen.*

Die Durchführung des Beweises liegt auf der Hand: Zunächst hat man sich von der eineindeutigen Zuordnung zwischen Matrizen und Geraden zu überzeugen und davon, daß die in der analytischen Geometrie über $\boldsymbol{R}_H$ erklärten Relationen „orthogonal" und „inzident" für die zugehörigen Matrizen gerade auf die in D 1 und D 3 angegebene Weise gekennzeichnet sind. Hiermit lassen sich dann die Axiome A 1 bis A 11 verifizieren. Man kann dabei die Ergebnisse von F. Bachmann[3]) benutzen, der diese Rechnungen für den Fall, daß $\boldsymbol{R}_H$ ein Körper ist, durchgeführt hat. Außerdem ziehe man die in [5]) beschriebenen Eigenschaften einer affinen Geometrie über einem $H$-Ring heran. Wir begnügen uns mit diesen Andeutungen.

Bemerkung. Es ist jetzt leicht möglich, den Anschluß an die Untersuchungen von J. Hjelmslev[1]) zu gewinnen und diese noch zu vervollständigen: Zunächst entnimmt man seinen Arbeiten, daß unsere Axiome A 1 bis A 11 bei ihm gelten sollen. Doch stellt er für seine Geometrien noch weitergehende Forderungen auf. Man kann jetzt ohne Schwierigkeit die sich daraus für den $H$-Ring ergebenden charakteristischen Eigenschaften angeben. Indem wir für die Beweise auf die Untersuchungen von F. Bachmann[3]) für den Fall, daß der $H$-Ring ein Körper ist, verweisen, die sich unmittelbar auf unseren allgemeineren Fall übertragen, erwähnen wir nur zwei Resultate:

*A 18.* Es gibt $g; h; j$ mit $g\,h; j\,g\,j = h$. (Es gibt eine Gerade $j$, welche den von den Geraden $g$ und $h$ gebildeten „rechten Winkel halbiert"[20]).)

Dies gilt genau dann, wenn in der definiten Form $k = 1$ gesetzt werden kann.

*A 19.* Zu $g; h$ gibt es $j$ mit $j\,g\,j = h$. (Existenz der „Winkelhalbierenden"[21]).)

Dies gilt genau dann, wenn $\boldsymbol{R}_H$ ein „pythagoräischer $H$-Ring" ist, d. h.: Zu $a, b \in R_H$ gibt es ein $c$ mit $a^2 + b^2 = c^2 \in \boldsymbol{R}_H$.

*Hamburg, Universität, Institut für Angewandte Mathematik.*

*(Eingegangen am 10. April 1954.)*

[20]) Dies ist Axiom VI bei J. Hjelmslev[1]) 3. Mitt. S. 5.

[21]) Siehe J. Hjelmslev[1]) 3. Mitt. S. 8.

HELLWIG, G.
Math. Zeitschr. Bd. 61, S. 26—46 (1954)

# Über partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung von gemischtem Typus.

Von
GÜNTER HELLWIG.

## Einleitung.

Wir betrachten die partielle Differentialgleichung

$$L[u] \equiv (A(x,y)\,u_x)_x - (C(x,y)\,u_y)_y - D(x,y)\,u = F(x,y) \tag{1}$$

mit reellen Koeffizienten und machen zur Erläuterung unserer Problemstellungen in der Einleitung die folgenden, später noch zu ergänzenden Voraussetzungen:

($\alpha$) *$A(x,y)$, $C(x,y)$ für $r_0 \leqq x < 0$, $0 < x \leqq r_1$, $-\infty < y < +\infty$ stetig differenzierbar.*

($\beta$) *Für $x > 0$ ist $AC > 0$ und mit $E(x,y) = \left| \frac{C(x,y)}{A(x,y)} \right|_x$ ist ferner $|E(x,y)| \leqq M_1(x)$, $|E(x,y_1) - E(x,y_2)| \leqq M_2(x)\,|y_1 - y_2|$, so daß $\int_0^x M_i(x)\,dx < \infty$ ausfällt.*

($\gamma$) *Es ist $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} E(x,y) = 0$ oder $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} E(x,y) = \infty$.*

($\delta$) *Für $x < 0$ ist $AC < 0$ und $A(x,y) = A^1(x)\,A^2(y)$, $C(x,y) = C^1(x)\,C^2(y)$.*

Die *Charakteristiken* von (1) werden durch die Differentialgleichung $A(x,y)\,dy^2 - C(x,y)\,dx^2 = 0$, die *charakteristischen Richtungen* durch

$$\frac{dy}{dx} = \pm E(x,y) = \pm \left| \frac{C(x,y)}{A(x,y)} \right|_x \tag{2}$$

festgelegt. Wir nennen (1) in einem Punkt $P:(x,y)$ von *elliptischem Typus*, wenn dieser Punkt Träger keiner reellen charakteristischen Richtung (2) ist ($C/A < 0$). (1) wird in $P$ von *hyperbolischem* bzw. *parabolischem Typus* genannt, wenn $P$ Träger genau zweier verschiedener, reeller charakteristischer Richtungen (2) ($C/A > 0$) bzw. Träger genau einer charakteristischen Richtung (etwa $C/A = 0$) ist[1]).

Die Gl. (1) ist für $x > 0$ hyperbolisch, für $x < 0$ elliptisch und wegen Voraussetzung ($\gamma$) für $x = 0$ parabolisch. Auf der parabolischen Kurve $\mathfrak{k}$ ($y$-Achse) präzisieren wir den Sachverhalt. Wir nennen $\mathfrak{k}$ a) Träger der charakteristischen Spitzen, wenn $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} E(x,y) = 0$, b) Einhüllende der Charakteristiken, wenn

[1]) Die übliche Definition ist: $AC < 0$ elliptisch, $AC > 0$ hyperbolisch, $AC = 0$ parabolisch. Dabei muß jedoch zusätzlich gefordert werden, daß $A$, $C$ überall stetig sind. Außerdem hat man meist auch $|A| + |C| > 0$ vorausgesetzt. Beides werden wir nicht tun. Nach unserer Definition ist z. B. $(x\,u_x)_x - x\,u_{yy} = 0$ überall hyperbolisch.

$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} E(x, y) = +\infty$ ist[2]). Entsprechend nennt man (1) auf $\mathfrak{k}$ hyperbolisch, wenn $\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} E(x, y) = e(y)$ mit $0 < e(y) < \infty$ ist.

Die einfachste Gleichung mit diesen Eigenschaften ist

$$u_{xx} - \operatorname{sign} x\,|x|^c u_{yy} = 0. \tag{3}$$

F. TRICOMI [14] ($c = 1$), S. GELLERSTEDT [4] ($c = 2n+1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$) u. a. haben für (3) die folgende Problemstellung behandelt[3]). Durch einen beliebigen Punkt $P_0 : (x_0, y_0)$ mit $x_0 > 0$ werden die zwei Charakteristiken $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ gelegt, die $\mathfrak{k}$ in den Punkten $P_1, P_2$ schneiden mögen. Durch $P_1, P_2$ wird weiterhin eine ganz in der linken Halbebene verlaufende Kurve $\mathfrak{c}$ mit eindeutiger Projektion auf $\mathfrak{k}$ gelegt. Das durch $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \mathfrak{c}$ begrenzte Gebiet $\mathfrak{g}$ zerteilen wir in die Gebiete $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1$. In $\mathfrak{g}_0$ (mit der Berandung $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \mathfrak{k}$) findet man mittels der GREEN-HADAMARDschen Funktion eine Lösung $v(x, y)$ von (3), die die vorgegebenen Werte $v|_{\mathfrak{c}_1} = \varphi(x)$, $v_x|_{\mathfrak{k}} = \nu(y)$ annimmt. Mittels einer GREENschen Funktion (E. HOLMGREN [7]) verschafft man sich weiter in $\mathfrak{g}_1$ eine Lösung $w(x, y)$ von (3), die den Randbedingungen $w|_{\mathfrak{c}} = \psi(y)$, $w_x|_{\mathfrak{k}} = \nu(y)$ genügt. In der Hoffnung, einen stetig differenzierbaren Übergang über die parabolische Kurve $\mathfrak{k}$ zu erhalten, fordert man $v(0, y) = w(0, y)$ und erhält daraus zur Bestimmung von $\nu(y)$ eine Integralgleichung. $u(x, y) = \{v(x, y)$ in $\mathfrak{g}_0, w(x, y)$ in $\mathfrak{g}_1\}$ ist offenbar eine „Lösung" von (3), die auf $\mathfrak{c}, \mathfrak{c}_1$ die Vorgaben $\psi, \varphi$ erfüllt. Diese durch die Vorgaben eindeutig bestimmte Lösung kann in einer endlichen Anzahl von Punkten auf dem Rande $\mathfrak{c}$ und auf $\mathfrak{k}$ in einer genauer angebbaren Weise unendlich werden [4]. Für Eindeutigkeitsfragen ist diese Problemstellung auch bei

$$u_{xx} - C(x)\, u_{yy} = 0 \tag{4}$$

[$C(x)$ monoton wachsend, zweimal stetig differenzierbar mit $C(x) > 0$ für $x > 0$, $C(0) = 0$ und weitere Voraussetzungen] von M. H. PROTTER [10] untersucht worden. Für allgemeinere Gleichungen siehe auch [1].

Bei einer anderen Problemstellung betrachtet man (4) für $x \geqq 0$ und wählt die parabolische Kurve $\mathfrak{k}$, die stets als Träger der charakteristischen Spitzen vorausgesetzt wird, als Anfangskurve eines Anfangswertproblems (F. J. FRANKL [3], L. BERS [2], M. H. PROTTER [11] u. a.[4]). In [5] wurde von W. HAACK und dem Verfasser das Anfangswertproblem für eine allgemeine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung auf eine singuläre „Integralgleichung" zurückgeführt. An dieser erkennt man, daß das CAUCHYsche Problem im allgemeinen nicht lösbar sein wird, wenn $\mathfrak{k}$ Einhüllende der Charakteristiken ist. Für (1) mit $D \equiv 0$ und Koeffizienten $A, C$, die sich auf

[2]) $\frac{dy}{dx} = \pm\infty$ wird als eine Richtung gezählt und bedeutet das Parallelsein zur $y$-Achse.

[3]) In [4], [14] (Literaturangaben am Ende der Arbeit) wird $y^c u_{xx} + u_{yy} = 0$ betrachtet.

[4]) Weitere Literaturangaben in [5].

$A = A_0(y) + x A_1(x, y)$, $C = x^c (C_0(y) + x C_1(x, y))$ mit $c > 0$ reduzieren lassen, ist dort gezeigt, daß die CAUCHYschen Vorgaben $\lim_{x \to 0} u(x, y) = u_0(y)$, $\lim_{x \to 0} u_x(x, y) = u_1(y)$ gestellt werden dürfen. Auch im folgenden machen wir diese Integralgleichung zum Ausgangspunkt (§ 2).

In [6] wurde vom Verfasser die parabolische Kurve als Randkurve eines Anfangs-Randwertproblems gewählt.

Zusammenfassend stellen wir fest, daß die skizzierten Problemstellungen die folgenden drei Forderungen erfüllen, wobei wir von der speziellen Gestalt der Differentialgleichung ganz absehen wollen: 1. Die Koeffizienten $A, C, D, F$ von (1) sind mit Einschluß entsprechender Ränder stetig. 2. Es ist stets $|A| + |C| > 0$. 3. Die parabolische Kurve $\mathfrak{k}$ ist Träger der charakteristischen Spitzen.

Es ist klar, daß viele Eigenarten der partiellen Differentialgleichungen von gemischtem Typus nicht hervortreten können, wenn man solche Einschränkungen macht. Andererseits wird man erwarten, daß die skizzierten Probleme in ganz bestimmter, vielleicht recht vernünftiger Weise ausgezeichnet sind. Solche Eigenarten und Auszeichnungen anzugeben ist ein Ziel dieser Arbeit.

Im ersten Abschnitt betrachten wir (1) für $x \geqq 0$ und wählen die parabolische Kurve $\mathfrak{k}$ [Vor. $(\gamma)$] als Anfangskurve, auf der die obigen drei Forderungen nicht bestehen müssen. Gefragt wird nach den auf $\mathfrak{k}$ zu stellenden Anfangsbedingungen, die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung gewährleisten. Dabei muß die Konstruktion eines durch die Charakteristiken $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ und $\mathfrak{k}$ begrenzten Gebietes $\mathfrak{g}_0$, das Einflußgebiet bezüglich $P_0$ genannt, nicht immer möglich sein, da $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ keine endlichen Schnittpunkte mit $\mathfrak{k}$ haben müssen[5]). Die Forderung, daß durch jeden Punkt $P_0$ ein endliches Einflußgebiet erzeugt wird, führt zu einer sachgemäßen Abgrenzung des Problemkreises. Hinreichende Voraussetzungen dazu sind die in $(\beta)$ genannten. Bei geeigneten Voraussetzungen über die Koeffizienten in (1) werden vollständige Fallunterscheidungen für das Anfangswertproblem angegeben und die Auszeichnungen für die CAUCHYschen Vorgaben aufgefunden (§ 3).

Im zweiten Abschnitt fragen wir nach sinnvollen Randwertproblemen von (1) für das Gebiet $\mathfrak{g}_1$ mit der Berandung $\mathfrak{c} + \mathfrak{k}$. Zu diesem Zwecke wurde (1) für $x < 0$ als „separierbar" vorausgesetzt [Vor. $(\delta)$]. Es ist nun von Interesse, Lösungen eines solchen Randwertproblems durch Formulierung eines Anfangswertproblems auf $\mathfrak{k}$ in den hyperbolischen Bereich fortzusetzen, wie dies in analoger Weise beim TRICOMI-Problem geschehen ist. Für eine stetige Fortsetzung ist notwendig, daß beim Randwertproblem die Vorgabe $\lim_{x \to 0} u(x, y) = u_0(y)$ mit $x < 0$ und beim Anfangswertproblem die Vorgabe $\lim_{x \to 0} u(x, y) = u_0(y)$ mit $x > 0$ zulässig ist. Entsprechend müßten bei einer stetig differenzierbaren Fortsetzung beim Randwertproblem die Vorgabe $\lim_{x \to 0} u_x(x, y) = u_1(y)$

[5]) Bei der Gleichung $(x^2 u_x)_x - u_{yy} = 0$ (welche die dritte Forderung verletzt) gibt es z. B. kein endliches Einflußgebiet $\mathfrak{g}_0$.

mit $x<0$ und beim Anfangswertproblem die CAUCHYschen Vorgaben $\lim_{x\to 0} u(x,y)=u_0(y)$, $\lim_{x\to 0} u_x(x,y)=u_1(y)$ zulässig sein. Betrachten wir als einfaches Beispiel

$$(|x|^a u_x)_x - \operatorname{sign} x\,|x|^c u_{yy}=0,$$

so ergibt sich als notwendige Forderung für eine stetig differenzierbare Fortsetzung im obigen Sinne $a>0$, $c>-1$. Dies ist die gesuchte Auszeichnung für den Gleichungstyp (3).

# I.

## § 1. Das charakteristische Netz.

Wir betrachten (1) in dem Rechteck

(1.1) $\mathfrak{r}$: $0\leqq x\leqq r_1$ mit $0<r_1\leqq 1$, $s_0\leqq y\leqq s_1$ mit $s_0<s_1$[6]).

Als Anfangskurve $\mathfrak{k}$ wählen wir das Geradenstück

(1.2) $\mathfrak{k}$: $x=0$, $s_0\leqq y\leqq s_1$.

Bezeichnungen: Mit $\mathfrak{r}-\mathfrak{k}$ bzw. $\overline{\mathfrak{r}-\mathfrak{k}}$ bezeichnen wir die Punktmengen $0<x\leqq r_1$ bzw. $0<\varepsilon\leqq x\leqq r_1$ und $s_0\leqq y\leqq s_1$. Teilrechtecke $\mathfrak{r}'\leqq\mathfrak{r}$ sind: $0\leqq x\leqq r_1'\leqq r_1$, $s_0\leqq s_0'\leqq y\leqq s_1'\leqq s_1$. Eine Funktion $\Phi(x,y)$ heißt in $\mathfrak{r}$ bzw. $\mathfrak{r}'$ bedingt stetig, wenn $x^q\Phi(x,y)$ mit $q\geqq 0$ dort stetig ist. Sind $\Phi$, $\Psi$ in $\mathfrak{r}$ stetige Funktionen mit der Eigenschaft: Zu jedem $\varepsilon>0$ gibt es ein $\mathfrak{r}_\delta$: $0\leqq x\leqq\delta(\varepsilon)$, $s_0\leqq y\leqq s_1$, so daß $|\Psi(x,y)|<\varepsilon$ in $\mathfrak{r}_\delta$, so schreiben wir für $\Phi+\Psi$ einfach $||\Phi||$. Entsprechendes in $\mathfrak{r}'$.

Die über $A$, $C$ in (1) zu machenden Voraussetzungen sollen recht allgemein sein. Ihre Formulierung wird nahegelegt, indem man etwa auf $A(x,y)$ formal die TAYLORsche Formel anwendet:

$$A(x,y)=\frac{x^a}{a!}A^{(a)}(0,y)+\frac{x^{a+1}}{(a+1)!}A^{(a+1)}(\vartheta x,y),\qquad 0<\vartheta<1.$$

**Voraussetzung (I)** *über die Koeffizienten in* (1):

(*a*) *In* $\mathfrak{r}$ *ist*

$$A(x,y)=x^\alpha\{A_0(y)+x^\alpha A_1(x,y)\},\qquad C(x,y)=x^c\{C_0(y)+x^\gamma C_1(x,y)\}$$

*mit reellen Zahlen* $a,\alpha,c,\gamma$ *und* $\alpha>0$, $\gamma>0$, $c>-1$, $c-a>-2$. $A_0(y)$, $C_0(y)$ *sind zweimal stetig differenzierbar und von gleichem Vorzeichen*:

$$0<\mathfrak{A}_0\leqq A_0(y)\leqq\mathfrak{A}_1,\qquad 0<\mathfrak{C}_0\leqq C_0(y)\leqq\mathfrak{C}_1\text{[7]};$$

$A_1(x,y)$, $C_1(x,y)$ *sind stetig differenzierbar*, $A_{1xy}$, $A_{1yy}$, $C_{1xy}$, $C_{1yy}$ *stetig*.

(*b*) $D(x,y)$, $D_y(x,y)$; $F(x,y)$, $F_y(x,y)$ *sind in* $\mathfrak{r}$ *bedingt stetig, und es ist*

$$|D(x,y)|,\ |D_y(x,y)|\leqq\mathfrak{D}x^d,\qquad |F(x,y)|,\ |F_y(x,y)|\leqq\mathfrak{F}x^f$$

*mit* $d>-1$, $d-a>-2$, $f>-1$, $f-a>-2$.

[6]) Die Annahme $r_1\leqq 1$ ist beim Anfangswertproblem unwesentlich.

[7]) Große Frakturbuchstaben bezeichnen stets geeignete, positive Zahlen. Sind $A_0$, $C_0$ negativ, multipliziere man (1) mit $-1$.

($c_1$) *$u_0(y), u_1(y)$ sind willkürliche in $s_0 \leqq y \leqq s_1$ zweimal stetig differenzierbare Funktionen.* ($c_2$) *$u_0(y), u_1(y)$ sind dreimal stetig differenzierbar.*

Unsere Betrachtungen beziehen sich stets auf $\mathfrak{r}$ oder auf jeweils passend zu wählende Teilrechtecke $\mathfrak{r}'$.

In $\mathfrak{r}' - \mathfrak{k}$ ist (1) hyperbolisch mit $|A| + |C| > 0$, denn mit (2) hat man

$$E(x,y) = x^{\frac{c-a}{2}} \sqrt{\frac{C_0(y)}{A_0(y)}} \sqrt{\frac{1 + x^{\gamma} \frac{C_1(x,y)}{C_0(y)}}{1 + x^{\alpha} \frac{A_1(x,y)}{A_0(y)}}}. \tag{1.3}$$

Auf $\mathfrak{k}$ ist (1) hyperbolisch wenn $c - a = 0$ gilt, parabolisch in allen anderen Fällen. Nur der Fall $c = a = 0$ führt zum klassischen CAUCHYschen Anfangswertproblem, allerdings nur formal, da die Koeffizienten $D, F$ von (1) auf $\mathfrak{k}$ nicht einmal stetig sein müssen.

Nach (1.3) sind $E, E_y$ in $\mathfrak{r}' - \mathfrak{k}$ stetig. Ferner ist

$$\mathfrak{E}_0 x^{\frac{c-a}{2}} \leqq E(x,y) \leqq \mathfrak{E}_1 x^{\frac{c-a}{2}}, \qquad |E_y(x,y)| \leqq \mathfrak{E}_2 x^{\frac{c-a}{2}} \tag{1.4}$$

mit $\mathfrak{E}_0 = \left| \sqrt{\frac{\mathfrak{C}_0}{\mathfrak{A}_1}} \right|$, $\mathfrak{E}_1 = \left| \sqrt{\frac{\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{A}_0}} \right|$[8]. Mit Voraussetzung (a) erkennt man aus (1.4), daß

$$|E(x,y)| \leqq M_1(x), \qquad |E(x,y_2) - E(x,y_1)| \leqq M_2(x)\,|y_2 - y_1|$$

*mit*

$$\int_0^x M_i(x)\,dx < \infty$$

ist, so daß der Satz von CARATHEODORY-KAMKE ([8] S. 34, S. 2) angewendet werden kann. Dabei beachte man, daß man $E(x,y)$ über $\mathfrak{k}$ für $x < 0$ ein Stück fortsetzen kann (etwa $E(x,y) = E(|x|, y)$ für $x < 0$). Danach gibt es durch jeden Punkt $P_0 : (x_0, y_0) \in \mathfrak{r}'$ genau eine Lösung $\mathfrak{c}_1 : Z(x; x_0, y_0)$, $\mathfrak{c}_2 : Y(x; x_0, y_0)$ jeder der beiden Differentialgleichungen $y' = -E(x,y)$, $y' = E(x,y)$[9]. $Y, Z$ sind in $\mathfrak{r}'$ in allen Argumenten stetig, in $\mathfrak{r}' - \mathfrak{k}$ stetig differenzierbar. $Y, Z$ werden ferner nur für $x \leqq x_0$ betrachtet. Es ist $Y(x_0; x_0, y_0) = Z(x_0; x_0, y_0)$. Mit $Z = y_0 + \int_x^{x_0} E(\xi, Z)\,d\xi$ und (1.4) findet man

$$\begin{cases} y_0 + \frac{2\mathfrak{E}_0}{c-a+2}\left(x_0^{\frac{c-a}{2}+1} - x^{\frac{c-a}{2}+1}\right) \leqq Z \\ \qquad\qquad \leqq y_0 + \frac{2\mathfrak{E}_1}{c-a+2}\left(x_0^{\frac{c-a}{2}+1} - x^{\frac{c-a}{2}+1}\right) \end{cases} \tag{1.5}$$

[8]) Damit nach Fußnote [7]) $\mathfrak{E}_0, \mathfrak{E}_1$ Zahlen sind, denke man sich für $\left| \sqrt{\frac{\mathfrak{C}_0}{\mathfrak{A}_1}} \right|$ nach unserer Bezeichnungsweise etwa $\sqrt{\frac{\mathfrak{C}_0}{\mathfrak{A}_1}} - \varepsilon_0$ für $\left| \sqrt{\frac{\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{A}_0}} \right|$ etwa $\sqrt{\frac{\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{A}_0}} + \varepsilon_1$ mit $\varepsilon_0, \varepsilon_1 > 0$ geschrieben.

[9]) Lösung bedeutet: $Y, Z$ erfüllt in $\mathfrak{r}'$ die Relation $y = y_0 \mp \int_x^{x_0} E(\xi, y)\,d\xi$, in $\mathfrak{r}' - \mathfrak{k}$ die Differentialgleichung.

und analog für $Y$. Die Schnittpunkte von $Y, Z$ mit $\mathfrak{k}$:

$$P_1 : (0, y_1) = (0, Z(0; x_0, y_0)), \qquad P_2 : (0, y_2) = (0, Y(0; x_0, y_0))$$

liegen bei geeigneter Wahl von $P_0$ in $\mathfrak{r}'$, wie man aus (1.5) entnimmt. Dadurch wird durch jeden solchen nicht auf $\mathfrak{k}$ gelegenen Punkt $P_0$ ein abgeschlossenes Gebiet $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}(x_0, y_0)$, das Einflußgebiet, festgelegt, das durch $\mathfrak{k}$ und die beiden durch $P_0$ gehenden Charakteristiken $Y, Z$ begrenzt wird. Liegt $P_0$ auf $\mathfrak{k}$, so besteht $\mathfrak{g}_0$ aus $P_0$. Wesentlich für diese Konstruktion ist die Vor. $c - a > -2$ [vgl. Fußnote [5])]. Wir betrachten ferner nur die Menge $\mathfrak{P}$ der Punkte $P_0$, so daß für das durch $P_0$ erzeugte Einflußgebiet gilt: $\mathfrak{g}_0 \subseteq \mathfrak{r}'$. Jedenfalls ist für $\mathfrak{P}$ sicher ein Teilrechteck von $\mathfrak{r}'$ zulässig, welches nach Vereinbarung wieder mit $\mathfrak{r}'$ bezeichnet wird.

In $\mathfrak{r}' - \mathfrak{k}$ sind $Y_{x_0}, Y_{y_0}, Z_{x_0}, Z_{y_0}$ nach Sätzen von Bendixson-Kamke [8] stetig. $Y_{y_0}$ genügt der Gleichung

$$Y_{y_0}(x; x_0, y_0) = 1 - \int_x^{x_0} E_y(\xi, Y(\xi; x_0, y_0))\, Y_{y_0}(\xi; x_0, y_0)\, d\xi. \tag{1.6}$$

Ist $\mathfrak{M}_\varepsilon$ der größte Wert von $|Y_{y_0}|$ in $\overline{\mathfrak{r}' - \mathfrak{k}}$, so erhält man mit (1.4) wegen $x \leq x_0$

$$\mathfrak{M}_\varepsilon \leq \frac{1}{1 - \frac{2\mathfrak{E}_2 x_0^{\frac{c-a}{2}+1}}{c-a+2}},$$

und damit $|Y_{y_0}|, |Z_{y_0}| \leq \mathfrak{Y}$ in $\mathfrak{r}'$. Dabei darf in unserer Bezeichnungsweise $\mathfrak{Y} = \|1\|$ gesetzt werden. Analog wird, indem man neben (1.4) die Gleichung

$$Y_{x_0}(x; x_0, y_0) = -E(x_0, y_0) - \int_x^{x_0} E_y(\xi, Y(\xi; x_0, y_0))\, Y_{x_0}(\xi; x_0, y_0)\, d\xi$$

benutzt, $|Y_{x_0}|, |Z_{x_0}| \leq 3\, x_0^{\frac{c-a}{2}}$ in $\mathfrak{r}'$. Schließlich erhält man mit (1.5), (1.6) leicht

$$|Z(x; x_0, y_0) - Y(x; x_0, y_0)| \leq \frac{4\mathfrak{E}_1}{c-a+2}\left(x_0^{\frac{c-a}{2}+1} - x^{\frac{c-a}{2}+1}\right), \tag{1.7}$$

$$|Z_{y_0}(x; x_0, y_0) - Y_{y_0}(x; x_0, y_0)| \leq \frac{4\mathfrak{Y}\mathfrak{E}_2}{c-a+2}\, x_0^{\frac{c-a}{2}+1}. \tag{1.8}$$

Damit sind die Abschätzungen für die Charakteristiken beendet.

Setzen wir $K(x, y) = \sqrt{A(x, y)\, C(x, y)}$, so wird nach Voraussetzung (a)

$$K(x, y) = x^{\frac{a+c}{2}} \sqrt{A_0(y)\, C_0(y)} \sqrt{1 + \frac{1}{A_0 C_0}(x^\alpha A_1 C_0 + x^\gamma A_0 C_1 + x^{\alpha+\gamma} A_1 C_1)}, \tag{1.9}$$

$$0 \leq \mathfrak{K}\, x^{\frac{a+c}{2}} \leq K(x, y) \leq \mathfrak{K}_1 x^{\frac{a+c}{2}}, \qquad |K_y(x, y)| \leq \mathfrak{K}_2 x^{\frac{a+c}{2}} \tag{1.10}$$

mit $\mathfrak{K} = \sqrt{\mathfrak{A}_0 \overline{\mathfrak{C}_0}}\, \|1\| = \sqrt{|\mathfrak{A}_0 \overline{\mathfrak{C}_0}|}$, $\mathfrak{K}_1 = |\mathfrak{A}_1 \overline{\mathfrak{C}_1}|$. Für $K_x$ und $K_y E$ findet man

mit (1.4), (1.9) bei Beachtung von $c-a>-2$

$$(1.11)\quad K_x(x,y)=x^{\frac{a+c}{2}-1}\left|\frac{a+c}{2}\sqrt{A_0(y)\,C_0(y)}\right|,\quad K_y(x,y)\,E(x,y)=x^{\frac{a+c}{2}-1}\,|0|$$

und damit für die Ausdrücke $L_{1,2}(x,y)=K_x(x,y)\pm K_y(x,y)\,E(x,y)$ nach leichter Rechnung die Abschätzungen

$$(1.12)\qquad |L_{1,2}(x,y)|\leq \mathfrak{L}\,x^{\frac{a+c}{2}-1},\qquad \mathfrak{L}=\left|\frac{a+c}{2}\sqrt{\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1}\right|,$$

$$(1.13)\qquad |L_{1y}(x,y)|,\ |L_{2y}(x,y)|\leq \mathfrak{L}_1\,x^{\frac{a+c}{2}-1}.$$

Diese sind auch für $a+c=0$ gültig.

Ist $G(x,y)$ in $\mathfrak{r}$ bedingt stetig, also $|G(x,y)|\leq \mathfrak{G}\,x^g$ mit $g>-1$, so wird mit (1.7)

$$(1.14)\quad \begin{cases} |H(x_0,y_0)|\equiv\left|\iint\limits_{\mathfrak{g}(x_0,y_0)} G(x,y)\,dx\,dy\right|\leq \\ \qquad\leq\int\limits_0^{x_0}dx\int\limits_{Y(x;x_0,y_0)}^{Z(x;x_0,y_0)}|G(x,y)|\,dy\leq\frac{\overline{\mathfrak{H}}\,\mathfrak{G}}{g+1}\,x_0^{\frac{c-a}{2}+g+2}=\mathfrak{H}\,x_0^{\frac{c-a}{2}+g+2}. \end{cases}$$

Dabei ist $\overline{\mathfrak{H}}=\frac{4\mathfrak{E}_1}{c-a+2}$ nur von den Größen des charakteristischen Netzes abhängig. Man findet weiter

$$(1.15)\qquad |H_{x_0}(x_0,y_0)|\leq\mathfrak{H}_1\,x_0^{\frac{c-a}{2}+g+1},\qquad |H_{y_0}(x_0,y_0)|\leq\mathfrak{H}_2\,x_0^{g+1}.$$

Wenn man überdies $G_y(x,y)$ in $\mathfrak{r}$ bedingt stetig voraussetzt: $|G_y(x,y)|\leq\mathfrak{G}\,x^g$ mit $g>-1$, so zeigt man durch Anwendung des Mittelwertsatzes

$$|G(x,Z)\,Z_{y_0}-G(x,Y)\,Y_{y_0}|\leq|G_y(x,\bar{y})|\,|Z_{y_0}|\,|Z-Y|+|G(x,Y)|\,|Z_{y_0}-Y_{y_0}|$$

bei Beachtung von (1.7), (1.8), daß über (1.15) hinaus die Ungleichung gilt

$$(1.16)\quad |H_{y_0}(x_0,y_0)|\leq\int\limits_0^{x_0}|G(x,Z)\,Z_{y_0}-G(x,Y)\,Y_{y_0}|\,dx\leq\mathfrak{H}_2\,x_0^{\frac{c-a}{2}+g+2}.$$

Zusammenfassung. In $\mathfrak{r}$ bzw. $\mathfrak{r}'$ gelten die Abschätzungen:

$|A(x,y)|\leq\mathfrak{A}\,x^a$, $|A_x(x,y)|$, $|A_{xy}(x,y)|\leq\mathfrak{A}\,x^{a-1}$ wenn $a\neq 0$,

$|A(x,y)|\leq\mathfrak{A}$, $|A_x(x,y)|$, $|A_{xy}(x,y)|\leq\mathfrak{A}\,x^{\alpha-1}$ wenn $a=0$ ist;

$|C(x,y)|$, $|C_y(x,y)|$, $C_{xy}(x,y)|\leq\mathfrak{C}\,x^c$; $|G(x,y)|\leq\mathfrak{G}\,x^g$;

$|H(x,y)|=\left|\iint\limits_{\mathfrak{g}(x,y)}G\,d\xi\,d\eta\right|\leq\mathfrak{H}\,x^h$, $|H_x(x,y)|\leq\mathfrak{H}_1\,x^{h_1}$, $|H_y(x,y)|\leq\mathfrak{H}_2\,x^{h_2}$;

$$\mathfrak{K}\,x^k\leq K(x,y)\leq\mathfrak{K}_1\,x^k,\qquad |K_y(x,y)|\leq\mathfrak{K}_2\,x^k;$$

$$|L_{1,2}(x,y)|\leq\mathfrak{L}\,x^l,\qquad |L_{1y}|,\ |L_{2y}|\leq\mathfrak{L}_1\,x^l;$$

$|Y_{y_0}(x;x_0,y_0)|$, $|Z_{y_0}(x;x_0,y_0)|\leq\mathfrak{Y}$, $|Y_{x_0}(x,x_0,y_0)|$, $|Z_{x_0}(x;x_0,y_0)|\leq\mathfrak{Z}\,x_0^z$.

Dabei ist

$$\alpha>0,\quad c>-1,\quad c-a>-2,\quad g>-1,\quad h=\frac{c-a}{2}+g+2,\quad h_1=\frac{c-a}{2}+g+1,$$

$$h_2=\begin{cases} g+1 & \text{wenn} \quad |G(x,y)|\leqq \mathfrak{G}\, x^g, \\ \frac{c-a}{2}+g+2 & \text{wenn überdies} \quad |G_y(x,y)|\leqq \mathfrak{G}\, x^g \quad \text{ist,}\end{cases}$$

$$k=\frac{a+c}{2},\quad l=\frac{a+c}{2}-1,\quad z=\frac{c-a}{2}.$$

Bezüglich der $x$-Potenzen lassen die hier gegebenen Abschätzungen keine Verschärfung zu, wie das Beispiel $(x^a u_x)_x - x^c u_{yy} = x^f$ zeigt. Gerade dieser Bestandteil wird später fast ausschließlich benötigt.

Es ist von besonderer Wichtigkeit für die Anwendungen, daß an Stelle von Vor. (a) in (I) jede andere Vor. über $A$, $C$ treten darf, die uns das Bestehen der in der Zusammenfassung genannten Ungleichungen gewährleistet, da nur diese weiterhin benötigt werden. Als Beispiel erwähnen wir:

($a_1$) *In* $\mathfrak{r}$ *ist* $A(x,y)=x^a A_1(x,y)$, $C(x,y)=x^c C_1(x,y)$ *mit reellen Zahlen* $a, c$ *und* $c>-1$, $c-a>-2$. $A_1, C_1$ *sind stetig differenzierbar,* $A_{1xy}, A_{1yy}$, $C_{1xy}, C_{1yy}$ *stetig, und es gilt*:

$$0<\mathfrak{A}_0\leqq A_1(x,y)\leqq \mathfrak{A}_1,\qquad 0<\mathfrak{C}_0\leqq C_1(x,y)\leqq \mathfrak{C}_1.$$

## § 2. Die singuläre Integralgleichung.

Jetzt soll die Methode dargelegt werden, die uns zur Lösung des Anfangswertproblems führt. Sie ist analog der in [5], ihre Durchführung wird aber wegen der zugelassenen Unstetigkeiten der Koeffizienten von (1) auf $\mathfrak{k}$ schwieriger.

Es sei $\mathfrak{k}_\varepsilon$ eine Parallele zur Anfangskurve $\mathfrak{k}$ im Abstande $\varepsilon>0$. Die Schnittpunkte der Charakteristiken $Z(x; x_0, y_0)$, $Y(x; x_0 y_0)$ durch $P_0$ mit $\mathfrak{k}_\varepsilon$ werden mit $P_{1,\varepsilon}, P_{2,\varepsilon}$ bezeichnet. Durch $Y, Z$ und $\mathfrak{k}_\varepsilon$ wird das abgeschlossene Gebiet $\mathfrak{g}_{0\varepsilon}$ begrenzt, welches für $\varepsilon\to 0$ in das Einflußgebiet $\mathfrak{g}_0$ übergeht. Wir integrieren (1) über $\mathfrak{g}_{0\varepsilon}$ und erhalten

$$\iint\limits_{\mathfrak{g}_{0\varepsilon}} \{(A u_x)_x - (C u_y)_y\}\, dx\, dy = \iint\limits_{\mathfrak{g}_{0\varepsilon}} (D u + F)\, dx\, dy. \tag{2.1}$$

Eine Umformung von (2.1) ergibt (vgl. [5])

$$\begin{cases} u(P_0)=\dfrac{1}{2K(P_0)}\Big\{K u|_{P_{1,\varepsilon}} + K u|_{P_{2,\varepsilon}} + \displaystyle\int_{P_{1,\varepsilon}}^{P_0} u\, dK + \int_{P_{2,\varepsilon}}^{P_0} u\, dK + \\ \qquad + \displaystyle\int_{P_{2,\varepsilon}}^{P_{1,\varepsilon}} (C u_y\, dx + A u_x\, dy) + \iint\limits_{\mathfrak{g}_{0\varepsilon}} (D u + F)\, dx\, dy\Big\}^{10}). \end{cases} \tag{2.2}$$

[10]) Transformiert man (1) auf charakteristische Koordinaten $\xi, \eta$ mit $\xi=\varphi(x,y)$, $\eta=\psi(x,y)$, wobei $\varphi, \psi$ den Differentialgleichungen $\sqrt{A}\,\varphi_x+\sqrt{C}\,\varphi_y=0$, $\sqrt{A}\,\psi_x-\sqrt{C}\,\psi_y=0$ zu genügen haben, so erhält man mit $\Phi=\varphi_x\psi_y-\varphi_y\psi_x$

$$(K(\xi,\eta)\,u_\xi)_\eta+(K(\xi,\eta)\,u_\eta)_\xi-\frac{D(\xi,\eta)}{\Phi(\xi,\eta)}\,u=\frac{F(\xi,\eta)}{\Phi(\xi,\eta)}. \tag{*}$$

Integriert man (*) in der $\xi, \eta$-Ebene (wo die Charakteristiken Parallele zu den Koordinatenachsen sind) über ein Einflußgebiet $\mathfrak{g}_\varepsilon(\xi_0, \eta_0)$ und transformiert den dabei entstehenden Ausdruck zurück, so ergibt sich (2.2).

Wegen $dx=0$ auf $\mathfrak{k}_\varepsilon$ erhalten wir für $\varepsilon\to 0$ die singuläre Funktionalgleichung

$$(2.3)\qquad \begin{cases} u(P_0)=\dfrac{1}{2K(P_0)}\Big\{K u|_{P_1}+K u|_{P_2}+\displaystyle\int_{P_1}^{P_0} u\,dK+\int_{P_2}^{P_0} u\,dK+ \\ \qquad\qquad +\displaystyle\int_{P_2}^{P_1} A u_x\,dy+\iint_{\mathfrak{g}_0}(Du+F)\,dx\,dy\Big\}. \end{cases}$$

Diese ist für zweimal stetig differenzierbare Funktionen $u$ mit der Gl. (1) äquivalent. Auf $\mathfrak{k}$ werden zweimal stetig differenzierbare Funktionen als Anfangswerte vorgeschrieben. *Eine Funktion $u(P_0)=u(x_0,y_0)$ wird Lösung eines solchen Anfangswertproblems genannt, wenn sie 1. in $\mathfrak{r}'$ stetig, in $\mathfrak{r}'-\mathfrak{k}$ stetig differenzierbar und das „Energieintegral"*

$$(2.4)\qquad E[u]=\iint_{\mathfrak{g}_0}\{A u_x^2+C u_y^2+|D|\,u^2\}\,dx\,dy<\infty\ ^{11})$$

*ist; 2. die Relation (2.3) für jedes Einflußgebiet $\mathfrak{g}_0$ erfüllt und die Anfangsbedingungen im Sinne zweidimensionaler Konvergenz annimmt*[12]).

Sicher nur in ausgezeichneten Fällen werden auf $\mathfrak{k}$ die CAUCHYschen Anfangsbedingungen

$$(2.5)\qquad \lim_{x\to 0} u(x,y)=u_0(y),\qquad \lim_{x\to 0} u_x(x,y)=u_1(y)$$

möglich sein. Für $U$ als gesuchte Funktion mit $u=U+x u_1+u_0$ werden diese auf Null reduziert. Bezeichnet man (2.3) als Grenzwert von (2.2) verstanden] mit $u=L^{-1}[F]$, so findet man leicht $u_0=L^{-1}[L\,u_0]]$, $x u_1=L^{-1}[L[x u_1]]$ und damit für $U$ die Funktionalgleichung $U=L^{-1}[F-L\,x u_1-L[u_0]]$, die mit (2.3) äquivalent ist. Ausgeschrieben (und wieder als Grenzwert verstanden) ergibt sich

$$(2.6)\qquad \begin{cases} U(P_0)=\dfrac{1}{2K(P_0)}\Big\{K U|_{P_1}+K U|_{P_2}+\displaystyle\int_{P_1}^{P_0} U\,dK+\int_{P_2}^{P_0} U\,dK+ \\ \qquad\qquad +\displaystyle\int_{P_2}^{P_1} A U_x\,dy+\iint_{\mathfrak{g}_0}(DU+G)\,dx\,dy\Big\}, \end{cases}$$

$$(2.7)\qquad \begin{cases} G=F-A_x u_1(y)+C(x u_1''(y)+u_0''(y))+ \\ \qquad +C_y(x u_1'(y)+u_0'(y))+D(x u_1(y)+u_0(y)). \end{cases}$$

An Stelle von (2.6) betrachten wir lediglich

$$(2.8)\qquad U(P_0)=\frac{1}{2K(P_0)}\Big\{\int_{P_1}^{P_0} U\,dK+\int_{P_2}^{P_0} U\,dK+\iint_{\mathfrak{g}_0}(DU+G)\,dx\,dy\Big\}.$$

[11]) $2L[u]$ ist die EULERsche Gleichung des nicht positiv definiten Variationsausdruckes $E^*[u]=\iint\{A u_x^2-C u_y^2+D u^2\}\,dx\,dy$. Wegen (2.4) ist $|E^*[u]|<\infty$.

[12]) Die Lösung erfüllt im Innern auch (1) oder jedenfalls die auf die „hyperbolische Normalform" transformierte Gl. (1), wenn auf jedem $\mathfrak{k}_\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$ mit den dort bekannten Werten $u, u_x, u_y$ die (2.3) erfüllen ein klassisches CAUCHYsches Anfangswertproblem für (1) gelöst werden kann.

Dieser Kunstgriff ist nur dann sinnvoll, wenn wir von den Lösungen der Funktionalgleichung (2.8) zeigen können, daß sie die Relationen

$$\lim_{\varepsilon\to 0} K\,U|_{P_{1,\varepsilon}} = 0, \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} K\,U|_{P_{2,\varepsilon}} = 0, \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{P_{2,\varepsilon}}^{P_{1,\varepsilon}} A\,U_x\,dy = 0 \tag{2.9}$$

erfüllen. Dann sind nämlich Lösungen von (2.8) auch solche von (2.6) und damit auch von (2.3).

Unter Beachtung von § 1 kann (2.8) explizit ausgeschrieben werden. Man hat mit $H(x_0, y_0) = \iint\limits_{\mathfrak{g}(x_0, y_0)} G\,dx\,dy$

$$\left\{\begin{aligned} U(x_0, y_0) = {} & \frac{1}{2K(x_0, y_0)} \Big\{ \int_0^{x_0} \big(U(x, Z(x; x_0, y_0))\, L_2(x, Z(x; x_0, y_0)) + \\ & + U(x, Y(x; x_0, y_0))\, L_1(x, Y(x; x_0, y_0))\big)\,dx + \\ & + \iint\limits_{\mathfrak{g}(x_0, y_0)} D(x, y)\, U(x, y)\,dx\,dy + H(x_0, y_0)\Big\}. \end{aligned}\right. \tag{2.10}$$

Für die Ableitungen erhält man (wieder in abgekürzter Schreibweise)

$$\left\{\begin{aligned} U_{x_0}(x_0, y_0) = {} & \frac{1}{2K(x_0, y_0)} \Big\{ \int_0^{x_0} (U_y(x, Z) L_2(x, Z) Z_{x_0} + U_y(x, Y) L_1(x, Y) Y_{x_0})\,dx + \\ & - \int_0^{x_0} (U(x, Z)\, L_{2y}(x, Z)\, Z_{x_0} + U(x, Y)\, L_{1y}(x, Y)\, Y_{x_0})\,dx - \\ & - \Big(\iint\limits_{\mathfrak{g}(x_0, y_0)} DU\,dx\,dy\Big)_{x_0} + H_{x_0}(x_0, y_0)\Big\}, \end{aligned}\right. \tag{2.11}$$

$$\left\{\begin{aligned} U_{y_0}(x_0, y_0) = {} & \frac{1}{2K(x_0, y_0)} \Big\{ \int_0^{x_0} (U_y(x, Z) L_2(x, Z) Z_{y_0} + U_y(x, Y) L_1(x, Y) Y_{y_0})\,dx + \\ & + \int_0^{x_0} (U(x, Z)\, L_{2y}(x, Z)\, Z_{y_0} + U(x, Y)\, L_{1y}(x, Y)\, Y_{y_0})\,dx - \\ & - 2K_{y_0}(x_0, y_0) U(x_0, y_0) + \Big(\iint\limits_{\mathfrak{g}(x_0, y_0)} DU\,dx\,dy\Big)_{y_0} + H_{y_0}(x_0, y_0)\Big\}. \end{aligned}\right. \tag{2.12}$$

In den folgenden Sätzen ist die Bezeichnung von § 1 (Zusammenfassung) gebraucht. Dabei wird wesentlich benutzt, daß $l - k + 1 = 0$ ist. Um die Übersicht nicht zu erschweren und den Aufwand gering zu halten, setzen wir weiterhin $D \equiv 0$ in (1) voraus. Die folgenden zwei Sätze bleiben in derselben Fassung auch für $D \not\equiv 0$ gültig. Im Anhang zu § 2 werden wir dies für Satz 1 zeigen.

**Satz 1.** *Ist* $h > 0$, $h - k > 0$ *und* $\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{R}\,h} < 1$, *so hat* (2.10) *eine in* $\mathfrak{r}'$ *stetige Lösung* $U(x_0, y_0)$ *mit* $\lim\limits_{x_0\to 0} U(x_0, y_0) = 0$. *Es ist überdies* $|U(x_0, y_0)| \leq \mathfrak{U}\, x_0^{h-k}$.

Mit dieser Lösung sind die folgenden Ausdrücke $V$, $W$, als Funktionen von $x_0$, $y_0$ aufgefaßt, bedingt stetig und genügen daher Abschätzungen der

angegebenen Form:

$$(2.13)\quad \begin{cases} |V(x_0, y_0; U)| \equiv \left| \int_0^{x_0} (U(x, Z)\, L_{2y}(x, Z)\, Z_{x_0} + U(x, Y)\, L_{1y}(x, Y)\, Y_{x_0})\, dx + \right. \\ \qquad \left. + H_{x_0}(x_0, y_0) \right| \leqq \mathfrak{V}\, x_0^v, \end{cases}$$

$$(2.14)\quad \begin{cases} |W(x_0, y_0; U)| \equiv \left| \int_0^{x_0} (U(x, Z)\, L_{2y}(x, Z)\, Z_{y_0} + U(x, Y)\, L_{1y}(x, Y) Y_{y_0})\, dx - \right. \\ \qquad \left. - 2K_{y_0}(x_0, y_0)\, U(x_0, y_0) + H_{y_0}(x_0, y_0) \right| \leqq \mathfrak{W}\, x_0^w\ ^{13}). \end{cases}$$

**Satz 2.** *Ist* $h > 0$, $h - k > 0$, $v - k > 0$, $w > 0$, $w - k > 0$, $w - k + z > 0$, $h - w > 0$ *und* $\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{K}\, h} < 1$, $\frac{\mathfrak{L}\mathfrak{Y}}{\mathfrak{K}\, w} < 1$, *so hat* (2.10) *eine stetig differenzierbare Lösung* $U(x_0, y_0)$ *mit* $\lim_{x_0 \to 0} U(x_0, y_0) = \lim_{x_0 \to 0} U_{x_0}(x_0, y_0) = \lim_{x_0 \to 0} U_{y_0}(x_0, y_0) = 0$. *Es ist überdies*

$$(2.15)\quad \begin{cases} |U(x_0, y_0)| \leqq \mathfrak{U}\, x_0^{h-k}, \qquad |U_{x_0}(x_0, y_0)| \leqq \mathfrak{U}_1\, x_0^{\mathrm{Min}\{v-k,\, w-k+z\}}, \\ \qquad\qquad |U_{y_0}(x_0, y_0)| \leqq \mathfrak{U}_2\, x_0^{w-k}\ ^{14}). \end{cases}$$

Beweis (Satz 1). Für (2.10) wird eine Folge von Funktionen $U^n(x_0, y_0)$ definiert durch

$$(2.16)\quad \begin{cases} U^n(x_0, y_0) = \frac{1}{2K(x_0, y_0)} \times \\ \times \left\{ \int_0^{x_0} (U^{n-1}(x, Z)\, L_2(x, Z) + U^{n-1}(x, Y)\, L_1(x, Y))\, dx - H(x_0, y_0) \right\} \end{cases}$$

mit $U^0 \equiv 0$. Mit vollständiger Induktion bei Beachtung von $l - k + 1 = 0$ findet man

$$(2.17)\quad |U^n(x_0, y_0)| \leqq \frac{\mathfrak{H}}{2\mathfrak{K}} \sum_{v=0}^{n-1} \left(\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{K}\, h}\right)^v x_0^{h-k} \leqq \frac{\mathfrak{H}}{2\mathfrak{K}} \frac{1}{1 - \frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{K}\, h}}\, x_0^{h-k}.$$

Jedes $U^n$ ist stetig und $\lim_{x_0 \to 0} U^n(x_0, y_0) = 0$. Durch $U = \lim_{n \to \infty} U^n = \sum_{v=1}^{\infty} (U^v - U^{v-1})$ wird eine Grenzfunktion erklärt. Man hat wegen (2.17)

$$\lim_{x_0 \to 0} U(x_0, y_0) = 0, \qquad |U(x_0, y_0) \leqq \mathfrak{U}\, x_0^{h-k}$$

und mittels Induktion

$$(2.18)\quad |U^v(x_0, y_0) - U^{v-1}(x_0, y_0)| \geqq \frac{\mathfrak{H}}{2\mathfrak{K}} \left(\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{K}\, h}\right)^{v-1} x_0^{h-k} < \frac{\mathfrak{H}}{2\mathfrak{K}} \left(\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{K}\, h}\right)^{v-1}$$

bei Beachtung von $x_0 \leqq 1$ (1.1). $\sum_{v=1}^{\infty} |U^v - U^{v-1}|$ ist gleichmäßig konvergent,

---

[13]) $v$, $w$ können negativ sein.

[14]) Ähnliche Sätze sind unter stärkeren Voraussetzungen in [5] bewiesen worden. Obige Sätze haben für unsere Problemstellung abschließenden Charakter. Die Ungleichung $h - w > 0$ ist unwesentlich und nur durch den Beweisgang bedingt.

$U(x_0, y_0)$ also stetig. Weiter wird etwa

$$(2.18a)\quad \left|\frac{1}{K(x_0, y_0)}\int_0^{x_0}(U(x,Z)-U^{n-1}(x,Z))\,L_2(x,Z)\,dx\right| < \frac{\mathfrak{H}}{2\mathfrak{K}}\,\frac{1}{1-\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{K}h}}\left(\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{K}h}\right)^n < \varepsilon$$

für $n > N(\varepsilon)$. Somit darf der Grenzübergang $n \to \infty$ auch unter dem Integral in (2.16) durchgeführt werden und Satz 1 ist bewiesen.

Beweis (Satz 2). Für (2.10), (2.11), (2.12) wird eine Folge von Funktionen $U^n(x_0, y_0)$ durch (2.16) und

$$(2.19)\quad \begin{cases} U^n_{y_0}(x_0, y_0) = \dfrac{1}{2K(x_0, y_0)}\left\{\displaystyle\int_0^{x_0}(U_y^{n-1}(x,Z)\,L_2(x,Z)\,Z_{y_0} + \right. \\ \qquad \left. + U_y^{n-1}(x,Y)\,L_1(x,Y)\,Y_{y_0})\,dx + W(x_0, y_0; U^{n-1})\right\}^{15}), \end{cases}$$

$$(2.20)\quad \begin{cases} U^n_{x_0}(x_0, y_0) = \dfrac{1}{2K(x_0, y_0)}\left\{\displaystyle\int_0^{x_0}(U_y^{n-1}(x,Z)\,L_2(x,Z)\,Z_{x_0} + \right. \\ \qquad \left. + U_y^{n-1}(x,Y)\,L_1(x,Y)\,Y_{x_0})\,dx + V(x_0, y_0; U^{n-1})\right\}^{15}) \end{cases}$$

definiert mit $U^0 \equiv 0$. Mit vollständiger Induktion findet man (2.16) und

$$(2.21)\quad |U^n_{y_0}(x_0, y_0)| \leq \frac{\mathfrak{W}}{2\mathfrak{K}}\sum_{\nu=0}^{n-1}\left(\frac{\mathfrak{L}\,\mathfrak{Y}}{\mathfrak{K}\,w}\right)^{\nu-1} x_0^{w-k},$$

$$(2.22)\quad |U^n_{x_0}(x_0, y_0)| \leq \frac{\mathfrak{V}}{2\mathfrak{K}}\,x_0^{v-k} + \frac{\mathfrak{W}}{2\mathfrak{K}}\,\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{K}}\,\frac{\mathfrak{Z}}{w}\sum_{\nu=0}^{n-2}\left(\frac{\mathfrak{L}\,\mathfrak{Y}}{\mathfrak{K}\,w}\right)^{\nu} x_0^{w-k+z}.$$

Jedes $U^n$ ist stetig differenzierbar und erfüllt die im Satz genannten drei Anfangsbedingungen. Durch $U = \lim_{n\to\infty} U^n = \sum_{\nu=1}^{\infty}(U^\nu - U^{\nu-1})$ wird eine Grenzfunktion erklärt, die die Anfangsbedingungen und die Abschätzungen (2.15) erfüllt. Mit (2.18), (2.19) und Fußnote [15]) findet man

$$(2.23)\quad \begin{cases} |W(x_0, y_0; U^{\nu-1}) - W(x_0, y_0; U^{\nu-2})| \leq \dfrac{\mathfrak{H}\,\mathfrak{L}_1\,\mathfrak{Y}}{\mathfrak{K}}\left(\dfrac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{K}h}\right)^{\nu-2}\dfrac{x_0^h}{h} + \dfrac{\mathfrak{H}\,\mathfrak{K}_2}{\mathfrak{K}}\left(\dfrac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{K}h}\right)^{\nu-1} x_0^h \\ \qquad \leq \mathfrak{P}\left(\dfrac{\mathfrak{L}\,\mathfrak{Y}}{\mathfrak{K}\,h}\right)^{\nu-1} x_0^h \quad \textit{mit} \quad \mathfrak{P} = \mathfrak{H}\left(\dfrac{\mathfrak{L}_1}{\mathfrak{L}} + \dfrac{\mathfrak{K}_2}{\mathfrak{K}}\right) \\ \qquad \leq \mathfrak{P}\left(\dfrac{\mathfrak{L}\,\mathfrak{Y}}{\mathfrak{K}\,w}\right)^{\nu-1}\left(\dfrac{w}{h}\right)^{\nu-1} x_0^w \quad \textit{wegen} \quad h - w > 0. \end{cases}$$

[15]) Die Bedeutung von $V(x_0, y_0; U^{n-1})$ ist mit (2.13) klar. $W(x_0, y_0; U^{n-1})$ ist erklärt durch

$$\int_0^{x_0}(U^{n-1}(x,Z)\,L_{2y}(x,Z)\,Z_{y_0} + U^{n-1}(x,Y)\,L_{1y}(x,Y)\,Y_{y_0})\,dx - \\ - 2K_{y_0}(x_0, y_0)\,U^n(x_0, y_0) + H_{y_0}(x_0, y_0).$$

Die Abschätzungen von $V$, $W$ sind wegen (2.17) unabhängig von $n$.

Dabei ist zu beachten, daß $\mathfrak{Y} \geqq 1$ ist (§ 1). Durch Induktionsschluß bestätigt man

$$(2.24)\qquad |U^{\nu}_{y_0}(x_0, y_0) - U^{\nu-1}_{y_0}(x_0, y_0)| \leqq \frac{1}{2\mathfrak{K}} \left(\frac{\mathfrak{L}\mathfrak{Y}}{\mathfrak{K} w}\right)^{\nu-1} \left\{\mathfrak{W} + \mathfrak{P} \sum_{j=0}^{\nu-1} \binom{w}{h}^{j}\right\} x_0^{w-k}.$$

Damit ist $\sum_{\nu=1}^{\infty} |U^{\nu}_{y_0} - U^{\nu-1}_{y_0}|$ gleichmäßig konvergent und $U_{y_0}$ stetig. Der Grenzübergang $n \to \infty$ darf unter den Integralen in (2.19) vorgenommen werden. Bei $W$ ist dies klar (Satz 1), für die anderen Glieder wird etwa

$$\left| \frac{1}{K(x_0, y_0)} \int_0^{x_0} (U_{y_0}(x, Z) - U^{n-1}_{y_0}(x, Z))\, L_2(x, Z)\, Z_{y_0}\, dx \right|$$

$$\leqq \frac{1}{4\mathfrak{K}} \left(\mathfrak{W} + \frac{\mathfrak{P}}{1 - \frac{w}{h}}\right) \frac{1}{1 - \frac{\mathfrak{L}\mathfrak{Y}}{\mathfrak{K} w}} \left(\frac{\mathfrak{L}\mathfrak{Y}}{\mathfrak{K} w}\right)^{n} < \varepsilon$$

für $n > N(\varepsilon)$.

Mit (2.18), (2.24) findet man aus (2.20) mit etwas Zwischenrechnung

$$(2.25)\qquad |U^{\nu}_{x_0}(x_0, y_0) - U^{\nu-1}_{x_0}(x_0, y_0)| \leqq \mathfrak{Q} \left(\frac{\mathfrak{L}\mathfrak{Y}}{\mathfrak{K} w}\right)^{\nu-1} x_0^{w-k+z}.$$

Damit ist auch $U_{x_0}$ stetig. Der Grenzübergang $n \to \infty$ darf in (2.20) unter den Integralen durchgeführt werden. Bei $V$ ist dies klar. Andererseits ist mit (2.24)

$$\left| \frac{1}{K(x_0, y_0)} \int_0^{x_0} (U_{y_0}(x, Z) - U^{n-1}_{y_0}(x, Z))\, L_2(x, Z)\, Z_{x_0}\, dx \right|$$

$$\leqq \frac{\mathfrak{Z}}{4\mathfrak{K}^2} \left(\mathfrak{W} + \frac{\mathfrak{P}}{1 - \frac{w}{h}}\right) \frac{1}{1 - \frac{\mathfrak{L}\mathfrak{Y}}{\mathfrak{K} w}} \left(\frac{\mathfrak{L}\mathfrak{Y}}{\mathfrak{K} w}\right)^{n} < \varepsilon$$

für $n > N(\varepsilon)$ da $x_0^{w-k+z} \leqq 1$ ist. Damit ist Satz 2 bewiesen.

## Anhang.

Wir betrachten die Differentialgleichung (1) mit $D(x, y) \neq 0$ und beweisen Satz 1:

Beweis. Für (2.10) wird eine Folge von Funktionen $U^n(x_0, y_0)$ definiert durch

$$(2.26)\qquad \begin{cases} U^n(x_0, y_0) = \dfrac{1}{2K(x_0, y_0)} \Big\{ \displaystyle\int_0^{x_0} (U^{n-1}(x, Z)\, L_2(x, Z) - \\ \qquad + U^{n-1}(x, Y)\, L_1(x, Y))\, dx + \displaystyle\iint_{\mathfrak{g}(x_0, y_0)} D\, U^{n-1}\, dx\, dy + H(x_0, y_0) \Big\} \end{cases}$$

mit $U^0 \equiv 0$. Man hat $|U^1| \leqq \frac{\mathfrak{H}}{2\mathfrak{K}} x_0^{h-k}$. Wegen $|D U^1| \leqq \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{H}}{2\mathfrak{K}} x^{d+h-k}$ ergibt sich mit (1.14)

$$\left| \iint_{\mathfrak{g}(x_0, y_0)} D\, U^1\, dx\, dy \right| \leqq \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{H}\mathfrak{F}}{2\mathfrak{K}} \frac{x_0^{c-a+d+h-k+2}}{(d+h-k+1)}.$$

Da $d > -1$ ergibt sich $d + h - k + 1 > 0$. Mit Vor. (I), (b) setzen wir $d - a + 2 = \eta > 0$ und erhalten $\frac{c-a}{2} + d + h - k + 2 = h + \eta$. Aus (2.26) folgert man

$$(2.27) \quad |U^2(x_0, y_0)| \leq \frac{\mathfrak{H}}{2\mathfrak{K}} (1 + T)\, x_0^{h-k} \quad \text{mit} \quad T = \frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{K} h} + \frac{\mathfrak{D}\,\overline{\mathfrak{H}}}{2\mathfrak{K}} \frac{x_0^{\eta}}{(d + h - k + 1)}.$$

Die $x_0$-Abhängigkeit von $T$ darf nicht unterdrückt werden. Mit leichten Abschätzungen findet man

$$\left| \int_0^{x_0} U^2(x, Z)\, L_2(x, Z)\, dx \right| \leq \frac{\mathfrak{H}\,\mathfrak{L}}{2\mathfrak{K}} \frac{1 + T}{h} x_0^h,$$

$$\left| \iint_{\mathfrak{g}(x_0, y_0)} D\, U^2\, dx\, dy \right| \leq \frac{\mathfrak{D}\,\mathfrak{H}\,\overline{\mathfrak{H}}}{2\mathfrak{K}} \frac{1 + T}{(d + h - k + 1)} x_0^{h+\eta},$$

$$|U^3(x_0, y_0)| \leq \frac{\mathfrak{H}}{2\mathfrak{K}} (1 + T + T^2)\, x_0^{h-k}$$

und mit vollständiger Induktion bei analogen Abschätzungen

$$(2.28) \quad |U^n(x_0, y_0)| \leq \frac{\mathfrak{H}}{2\mathfrak{K}} \sum_{\nu=0}^{n-1} T^{\nu} x_0^{h-k} \leq \frac{\mathfrak{H}}{2\mathfrak{K}} \frac{1}{1 - T} x_0^{h-k},$$

indem wir beachten, daß $0 < T < 1$ in einem geeigneten Rechteck $\mathfrak{r}'$ gilt. An Stelle von (2.18) erhalten wir

$$(2.29) \quad |U^{\nu}(x_0, y_0) - U^{\nu-1}(x_0, y_0)| \leq \frac{\mathfrak{H}}{2\mathfrak{K}} T^{\nu-1} x_0^{h-k} \leq \frac{\mathfrak{H}}{2\mathfrak{K}} T^{\nu-1}.$$

Indem wir nun $T$ durch eine Konstante $\mathfrak{T} < 1$ abschätzen wird wie bei (2.18a)

$$(2.30) \quad \left| \frac{1}{K(x_0, y_0)} \int_0^{x_0} (U(x, Z) - U^{n-1}(x, Z))\, L_2(x, Z)\, dx \right| \leq \frac{\mathfrak{H}}{2\mathfrak{K}} \frac{\mathfrak{T}^n}{1 - \mathfrak{T}} < \varepsilon$$

für $n > N(\varepsilon)$. Damit ist alles bewiesen.

### § 3. Die Lösung des Anfangswertproblems.

Es müssen auf $\mathfrak{k}$ geeignete Vorgaben gefunden werden, so daß wir mit diesen eine Lösung von (2.3) in dem dort genannten Sinne finden. Dabei werden stets die Voraussetzungen (I) mit ($c_2$) gemacht. Die am Ende von § 1 gegebene Zusammenfassung wird laufend benutzt. Zunächst werden einige Angaben über die Qualität der in Satz 2 angeführten Ungleichungen benötigt.

$G(x, y)$ ist durch (2.7) gegeben. Mit Vor. ($c_2$) hat man $|G(x, y)|, |G_y(x, y)| \leq \mathfrak{G}\, x^{\varepsilon}$. Dabei ist

$$g = \operatorname{Min} \left\{ f, \begin{array}{ll} a - 1 \ (\text{wenn } a \neq 0) & c \ (\text{wenn } u_0(y) \neq \text{const}) \\ \alpha - 1 \ (\text{wenn } a = 0) & c + 1 \ (\text{wenn } u_0(y) = \text{const}) \end{array}, \begin{array}{c} d \ (\text{wenn } u_0(y) \neq \text{const}) \\ d + 1 \ (\text{wenn } u_0(y) = \text{const}) \end{array} \right\}.$$

**Satz 3.** *Ist* $g > -1$, $g - a > -2$ *so gilt:*

($\alpha$) $h > 0$, $h - k > 0$, $w > 0$, $w - k > 0$ *und* $h - w > 0$;

($\beta$) $w - k + z > v - k$;

($\gamma$) $\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{K}\, h} < 1$, $\frac{\mathfrak{L}\,\mathfrak{Y}}{\mathfrak{K}\, w} < 1$

*in einem geeigneten Rechteck* $\mathfrak{r}'$.

Beweis. ($\alpha$) Es ist $h = \frac{c-a}{2} + g + 2 > 0$ wegen $c - a > -2$, $h - k = g - a + 2 > 0$. Mit ($\gamma$) ist Satz 1 anwendbar und liefert $|U| \leqq \mathfrak{U}\, x^{h-k}$. Die $w$-Bestimmung (2.14) ergibt $w = h$. Sicher ist auch $w = h - \varepsilon$ mit $\varepsilon > 0$ und hinreichend klein zulässig. Dann ist $h - w = \varepsilon > 0$ und $w - k > 0$. ($\beta$) Die $v$-Bestimmung (2.13) liefert $v = \operatorname{Min}\left\{h + \frac{c-a}{2}, h - 1\right\} = h - 1$ wegen $c - a > -2$. Man hat $w - k + z = h + \frac{c-a}{2} - k - \varepsilon > h - 1 - k = v - k$. ($\gamma$) In der Bezeichnungsweise von § 1 ist in $\mathfrak{r}'_\delta$:

$$\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{K}\, h} = \frac{\left|\frac{|a+c|}{2}\sqrt{\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{C}_1}\right|}{h\,\sqrt{\mathfrak{A}_0\,\mathfrak{C}_0}} \leqq \frac{|a+c|\,(\sqrt{\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{C}_1} + 2\varepsilon_1)}{2h\,(\sqrt{\mathfrak{A}_0\,\mathfrak{C}_0} - \varepsilon_2)} = \frac{|a+c|}{2h}\sqrt{\frac{\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{A}_0\,\mathfrak{C}_0}}\,\frac{1 + \frac{2\varepsilon_1}{|a+c|\sqrt{\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{C}_1}}}{1 - \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{\mathfrak{A}_0\,\mathfrak{C}_0}}}$$

bei $|a+c| \neq 0$. Für $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{C}_0$; $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{C}_1$ dürfen die kleinsten und größten Werte von $A_0(y)$, $C_0(y)$ in $\mathfrak{r}'_\delta$ eingesetzt werden: $\sqrt{\frac{\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{A}_0\,\mathfrak{C}_0}} = 1 + \varepsilon_3$. Es verbleibt daher zu zeigen, daß $\frac{|a+c|}{2h} < 1$ ist. 1. $a + c > 0$. Die Ungleichung folgt dann aus $g - a > -2$. 2. $a + c < 0$. Die Ungleichung folgt aus $g + c > -2$. Analog verfährt man bei $\frac{\mathfrak{L}\,\mathfrak{Y}}{\mathfrak{K}\, w}$, indem man beachtet, daß $\mathfrak{Y} = 1 + \varepsilon_4$ in $\mathfrak{r}'_\delta$ gesetzt werden darf. Für $a + c = 0$ sind die Ungleichungen trivial.

Bemerkungen. 1. Mit ($\beta$) ergibt sich in Satz 2 die Verschärfung: $|U_{x_0}(x_0, y_0)| \leqq \mathfrak{U}_1\, x_0^{v-k}$. 2. Lösungen der Funktionalgleichung (2.8) mit $|U(x_0, y_0)| \leqq \mathfrak{U}\, x_0^{h-k}$, $|U_{x_0}(x_0, y_0)| \leqq \mathfrak{U}_1\, x_0^{v-k}$ erfüllen die Relationen (2.9), denn es ist:

$$|K\,U| \leqq \mathfrak{K}_1\, x_0^h, \qquad |A\,U_{x_0}| \leqq \mathfrak{A}\,\mathfrak{U}_1\, x_0^{v-k+a}$$

mit $h > 0$, $v - k + a = h - 1 - k + a = g + 1 > 0$. 3. Für Lösungen der Funktionalgleichung (2.6) mit $\lim_{x_0 \to 0} U(x_0, y_0) = \lim_{x_0 \to 0} U_{x_0}(x_0, y_0) = 0$ ist das Bestehen der Ungleichungen $h - k > 0$, $v - k > 0$ notwendig.

Wir geben nun die vollständigen Fallunterscheidungen für das Anfangswertproblem der Gl. (1) unter Vor. (I)[16]) mit ($c_2$) und setzen $D(x, y) \equiv 0$ voraus. Die Angaben für $D \not\equiv 0$ werden in Klammern gesetzt.

**1. Fall:** $a = 0$, $c > -1$, $(d > -1)$, $f > -1$.

**Vorgaben:** $\lim_{x \to 0} u(x, y) = u_0(y)$, $\lim_{x \to 0} u_x(x, y) = u_1(y)$.

[16]) Es sei erinnert, daß für Vor. (a) auch ($a_1$) oder eine gleichwertige zulässig ist (§ 1).

$\mathfrak{k}$ *ist a) hyperbolische Anfangskurve mit* $0 < A + C < \infty$ *(bei* $c = 0$*) oder b) parabolische Anfangskurve mit* $A + C > 0$.

I. $F(x, y) \equiv 0$. Man setzt $u = U + x u_1 + u_0$ und kommt zur Gl. (2.6), die mit (2.3) äquivalent ist. Betrachtet wird (2.8). $G$ ist durch (2.7) mit $D = F = 0$ gegeben. Man hat $g = \text{Min}\{\alpha - 1, c\}$, $g > -1$.

1. $g = \alpha - 1$. Man findet $v = \frac{c}{2} + \alpha$, $v - k = \alpha > 0$. Mit Satz 3 sind alle Voraussetzungen des Satzes 2 erfüllt. Damit ist eine Lösung der Gl. (2.8) aufgefunden, die wegen Bemerkung 2 auch Lösung von (2.6) ist. Man zeigt leicht $E[u] < \infty$ (2.4).

2. $g = c$. Man findet $v = \frac{3c}{2} + 1$, $v - k = c + 1 > 0$ und schließt wie oben weiter.

II. $F(x, y) \not\equiv 0$. Es genügt hier bekanntlich eine Lösung von (1) mit $\lim_{x \to 0} u(x, y) = \lim_{x \to 0} u_x(x, y) = 0$ zu finden. Man setzt also $u = U$ und $G = F$. Also wird $g = f$ und $g > -1$, $v = \frac{c}{2} + f + 1$, $v - k = f + 1 > 0$ und weiter wie oben.

Die in I. und II. bestimmten Lösungen $U^{\mathrm{I}}$, $U^{\mathrm{II}}$ erfüllen (2.8) und auch (2.6) und damit erfüllt $u^{\mathrm{I,II}} = U^{\mathrm{I,II}} + x u_1 + u_0$ die Funktionalgleichung (2.3). $u = u^{\mathrm{I}} + u^{\mathrm{II}}$ ist die Lösung des Gesamtproblems, die wir durch entsprechende Wiederholungen des Verfahrens unter Benutzung des Eindeutigkeitssatzes (§ 4) in einem geeigneten Streifen $\mathfrak{s}$ um die Anfangskurve $\mathfrak{k}$ finden. $u(x, y)$ ist in $\mathfrak{s}$ stetig differenzierbar mit $E[u] < \infty$[17]), erfüllt in $\mathfrak{s}$ die Funktionalgleichung (2.3) und nimmt die Anfangswerte im Sinne zweidimensionaler Konvergenz an. Es ist also auch $\lim_{x \to 0} u_y(x, y) = u_0'(y)$.

**2. Fall:** $c - a > -1$, $(d - a > -1)$, $f - a > -1$ **mit** $a \neq 0$.

**Vorgaben:** $\lim_{x \to 0} u(x, y) = u_0(y)$, $\lim_{x \to 0} u_x(x, y) = 0$.

$\mathfrak{k}$ *ist a) hyperbolische Anfangskurve mit* $A + C = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$ *(bei* $c = a$*) oder b) parabolische Anfangskurve.*

I. $F(x, y) \equiv 0$. Man setzt $u = U + u_0$ und kommt zur Gl. (2.6). Betrachtet wird (2.8). Man findet mit (2.7) $G = C u_0''(y) + C_y u_0'(y)$ und damit $g = c > -1$, $g - a > -1$. Es wird $v = \frac{c - a}{2} + c + 1$, $v - k = c - a + 1 > 0$. Satz 3 und Bemerkung 2 liefert die Anwendbarkeit von Satz 2 und das Erfülltsein von (2.9). Mit den Ungleichungen $|A u_x^2| = |A U_x^2| \leqq \mathfrak{A}\, \mathfrak{U}_1^2\, x^{2c-a+2}$, $|C u_y^2| = |C (U_y + u_0')^2| \leqq \mathfrak{B}\, x^c$ erschließt man $E[u] < \infty$.

II. $F(x, y) \not\equiv 0$ bleibt dem Leser überlassen.

Die Lösung $u(x, y)$ des Gesamtproblems hat dieselben Eigenschaften wie im 1. Falle.

**3. Fall:** $c - a > -2$, $(d - a > -2)$, $f - a > -2$ **mit** $a \neq 0$[18]).

**Vorgabe:** $\lim_{x \to 0} u(x, y) = u_0(y)$.

[17]) Aus $E[u^{\mathrm{I}}] < \infty$, $E[u^{\mathrm{II}}] < \infty$ folgt $E[u^{\mathrm{I}} + u^{\mathrm{II}}] < \infty$.

I. $F(x, y) \equiv 0$. Wir setzen $u = U + u_0$ und erhalten dieselben Größen wie im 2. Falle. Es ist $g > -1$, $g - a > -2$ aber a) $v - k = 0$ wenn $c - a = -1$, b) $v - k < 0$ wenn $c - a < -1$ ist. Mit Satz 3 folgt, daß bis auf $v - k$, $w - k + z$ alle Ungleichungen des Satzes 2 erfüllt sind. Der Beweisgang von Satz 2 zeigt, daß für $U$, $U_y$ alle Aussagen erhalten bleiben. Aus (2.22) entnimmt man für a) $\lim_{x \to 0} |U_x(x, y)| \leqq \frac{\mathfrak{B}}{2\mathfrak{K}}$, da mit Satz 3 ($\beta$) $w - k + z > 0$ ist. Mit Bemerkung 2 sind die Relationen (2.9) erfüllt, der Übergang von (2.8) zu (2.3) also möglich. Daß auch $E[u] < \infty$ besteht, erkennt man wie im zweiten Falle mit (1.14) wegen $2c - a + 2 = c + (c - a) + 2 > -1$.

II. $F(x, y) \not\equiv 0$ analog.

Die Lösung $u(x, y)$ und $u_y(x, y)$ sind in einem Streifen $\mathfrak{s}$ um die Anfangskurve $\mathfrak{k}$ stetig mit $E[u] < \infty$. $u_x(x, y)$ ist in $\mathfrak{s} - \mathfrak{k}$ stetig. $u$ erfüllt in $\mathfrak{s}$ die Funktionalgleichung (2.3) und nimmt die Anfangswerte im Sinne zweidimensionaler Konvergenz an. Es ist also $\lim_{x \to 0} u_y(x, y) = u_0'(y)$. Ist $c - a = -1$, $f - a \geqq -1$ bzw. $c - a \geqq -1$, $f - a = -1$, so ist überdies $\lim_{x \to 0} u_x(x, y)$ beschränkt.

Die gegebenen Fallunterscheidungen sind vollständige und unter unseren Voraussetzungen auch endgültige. Die folgenden *Ergänzungen* sind nützlich.

1. Sind die Koeffizienten in (1) auch auf $\mathfrak{k}$ stetig, also $a \geqq 0$, $c \geqq 0$, ($d \geqq 0$), $f \geqq 0$, so genügt bereits Vor. (I) mit ($c_1$). Man hat dann nicht nötig, von der Ungleichung (1.16) Gebrauch zu machen; es genügt (1.15).

2. Nur im 1. Falle sind die in der Einleitung genannten 3 Forderungen erfüllbar. Sie erweisen sich als nicht notwendig für die CAUCHYschen Anfangsvorgaben. Vielmehr ist für diese Vorgaben das Vorliegen des Falles 1 notwendig und hinreichend. Analoges gilt für die anderen Fälle. Man erschließt dies mit Bemerkung 3. Beachtet sei jedoch in diesem Zusammenhange unser recht allgemeiner Lösungsbegriff[18a]).

## § 4. Eindeutigkeit der Lösung.

Diese soll für unsere drei Fälle gemeinsam bewiesen werden. Wegen der Äquivalenz von (2.3) und (2.6) genügt es, sie für (2.6) zu beweisen. $U = u - x\,u_1 - u_0$ bzw. $U = u - u_0$ hat dann den Anfangsbedingungen $\lim_{x \to 0} U(x, y) = \lim_{x \to 0} U_x(x, y) = 0$ bzw. $\lim_{x \to 0} U(x, y) = 0$ zu genügen. Mit Bemerkung 3 (§ 3) kommen wir zu

**Satz 4.** *Die Gl.* (2.6) *hat höchstens eine in* $\mathfrak{r}'$ *stetige Lösung* $U^1$ *mit* $|U^1(x, y)| \leqq \mathfrak{U}^1 x^{h-k}$, $|U_x^1(x, y)| \leqq \mathfrak{U}_1^1 x^{h-k-1}$ *und* $h > 0$, $h - k > 0$.

Beweis. Gibt es zwei Lösungen $U^1$, $U^2$ von (2.6), so genügt $U = U^1 - U^2$ den Abschätzungen $|U| \leqq \mathfrak{U} x^{h-k}$, $|U_x| \leqq \mathfrak{U}_1 x^{h-k-1}$ und mit Bemerkung 2

[18]) Dabei ist vorausgesetzt, daß nicht alle Ungleichungen des zweiten Falles erfüllt sind.
[18a]) Siehe auch „Zusatz bei der Korrektur" am Schluß der Arbeit.

(§ 3) der Gl. (2.8):

$$U(x_0, y_0) = \frac{1}{2K(x_0, y_0)} \left\{ \int_0^{\gamma_0} \left( U(x,Z) L_2(x,Z) + U(x,Y) L_1(x,Y) \right) dx + \iint_{\mathfrak{g}(x_0, y_0)} D U \, dx \, dy \right\}.$$

Durch Induktionsschluß findet man mit analogen Schlüssen, wie sie im Anhang zu § 2 verwendet worden sind, für $U$ die Abschätzung

$$|U(x_0, y_0)| \leq \mathfrak{U} \mathfrak{T}^n x_0^{h-k}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Wegen $\mathfrak{T} < 1$ folgt daher $U \equiv 0$.

Bemerkung. Die Bedingung $|U_x^1(x, y)| \leq \mathfrak{U}_1^1 x^{h-k-1}$ kann durch $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{P_{1,\varepsilon}}^{P_{2,\varepsilon}} A U_x^1 \, dy = 0$ ersetzt werden.

## II.

### § 5. Randwertprobleme und Fortsetzung der Lösung.

Jetzt betrachten wir die Gl. (1) mit $D(x, y) \equiv 0$ [19]), $F(x, y) \equiv 0$ in dem Rechteck

$$\tilde{\mathfrak{r}}: \quad r_0 \leq x \leq 0, \qquad s_0 \leq y \leq s_1 \tag{5.1}$$

und machen über die Koeffizienten in (1) die

**Voraussetzung (II).** *(a) In* $\tilde{\mathfrak{r}} - \mathfrak{k}$ *sind* $A(x, y) = A^1(x) A^2(y)$, $C(x, y) = -C^1(x) C^2(y)$ *stetig differenzierbar mit* $AC < 0$ [20]). *(b)* $u_3(x)$ *bzw.* $u_3(y)$ *sind auf der Berandung* $\tilde{\mathfrak{b}}$ *von* $\tilde{\mathfrak{r}}$, $u_4(x)$ *bzw.* $u_4(y)$ *sind auf* $\tilde{\mathfrak{b}} - \mathfrak{k}$, $u_5(y)$ *auf* $\mathfrak{k}$ *zweimal stetig differenzierbar.*

Es wird die Gl. (1) mit den Randbedingungen

$$1. \lim_{(x,y) \to \tilde{\mathfrak{b}}} u(x, y) = u_3 \quad \textit{oder} \quad 2. \lim_{(x,y) \to \tilde{\mathfrak{b}} - \mathfrak{k}} u(x, y) = u_4, \qquad \lim_{x \to 0} u_x(x, y) = u_5(y) \tag{5.2}$$

betrachtet. Durch Einführung einer neuen gesuchten Funktion $U$ dürfen diese Randwertprobleme in der Form $L[U] = G_i(x, y)$ $(i = 1, 2)$ mit den Randwerten

$$1. \lim_{(x,y) \to \tilde{\mathfrak{b}}} U(x, y) = 0 \quad \text{oder} \quad 2. \lim_{(x,y) \to \tilde{\mathfrak{b}} - \mathfrak{k}} U(x, y) = 0, \qquad \lim_{x \to 0} U_x(x, y) = 0 \tag{5.3}$$

angenommen werden. Auf $\mathfrak{k}$ können $A$, $C$ beliebig hohe Singularitäten haben. Daher werden diese Randwertprobleme im allgemeinen nicht lösbar sein. Um notwendige Bedingungen für ihre Lösbarkeit anzugeben, wurde (1) als „separierbar" vorausgesetzt. Wir betrachten das Eigenwertproblem

$$-L[U] = \lambda A^2(y) C^1(x) U \tag{5.4}$$

mit den Randbedingungen (5.3) im HILBERTschen Raum $\mathfrak{R}$:

$$\iint_{\tilde{\mathfrak{r}}} |U|^2 A^2(y) C^1(x) \, dx \, dy < \infty .$$

[19]) Diese Annahme ist wesentlich.

[20]) Um einige Fallunterscheidungen zu vermeiden, wollen wir $A^1$, $A^2$, $C^1$, $C^2$ positiv annehmen.

Ist $\Phi_\nu(x, y)$ ein in $\mathfrak{R}$ vollständiges System von Eigenfunktionen zu den Eigenwerten $\lambda_\nu \neq 0$ mit

$$\iint_{\tilde{\mathfrak{r}}} \Phi_i(x, y)\, \Phi_k(x, y)\, A^2(y)\, C^1(x)\, dx\, dy = \delta_{ik},$$

so erhalten wir bekanntlich formal die Lösung obiger Randwertprobleme in der Form

$$U_i(x, y) = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\Phi_\nu(x, y)}{\lambda_\nu} \iint_{\tilde{\mathfrak{r}}} G_i(x, y)\, \Phi_\nu(x, y)\, dx\, dy. \tag{5.5}$$

Durch den Ansatz $U = U^1(x)\, U^2(y)$ und $\lambda = \lambda^1 + \lambda^2$ zerfällt (5.4) und (5.3) in die Eigenwertprobleme (5.6) mit den Randbedingungen (5.7)

$$-(A^1 U^{1\prime})' = \lambda^1 C^1 U^1, \qquad -(C^2 U^{2\prime})' = \lambda^2 A^2 U^2; \tag{5.6}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to r_0} U^1(x) = 0, \quad \lim\limits_{x \to 0} U^1(x) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \lim\limits_{x \to 0} U^{1\prime}(x) = 0, \\ \lim\limits_{y \to s_0} U^2(y) = \lim\limits_{y \to s_1} U^2(y) = 0. \end{cases} \tag{5.7}$$

Das zweite Eigenwertproblem ist vom STURM-LIOUVILLEschen Typus, das erste dagegen ist ein (bezüglich $x = 0$) singuläres vom WEYLschen Typus, welches im HILBERTschen Raum $\mathfrak{R}^1$: $\int_{r_0}^{0} |U^1|^2\, C^1(x)\, dx < \infty$ betrachtet werden muß. Irgendwelche Randbedingungen bei $x = 0$ dürfen nur im Grenzkreisfall (vgl. etwa F. RELLICH [12], § 1) gestellt werden. Dieser liegt genau dann vor, wenn $\int_{0}^{0} C^1(x)\, dx < \infty$, $\int_{0}^{0} |B^1(x)|^2\, C^1(x)\, dx < \infty$ ist. Dabei ist $B^1(x) = \int_{x}^{} \frac{1}{A^1(\xi)}\, d\xi$ und $r_0 < \delta < 0$.

Sämtliche für (5.6) bei $x = 0$ im Grenzkreisfall zulässigen Randbedingungen lauten:

$$U_0^1 \cos\alpha + U_1^1 \sin\alpha = 0, \qquad 0 \leq \alpha < \pi. \tag{5.8}$$

Dabei sind $U_0^1, U_1^1$ die RELLICHschen Anfangszahlen. Sind $\Psi(x), \Omega(x)$ zwei linear unabhängigen Lösungen mit $A = A^1(\Omega' \Psi - \Omega \Psi') \neq 0$ von

$$-(A^1 Z')' - \mu C^1 Z = 0, \tag{5.9}$$

so werden $U_0^1, U_1^1$ in bezug auf $\Psi, \Omega, \mu$ so erklärt: Man definiere $W(x)$ durch $-(A^1 U^{1\prime})' - \mu C^1 U^1 = W(x) C^1(x)$ und bestimme zwei Zahlen $U_0^1, U_1^1$, so daß

$$U^1(x) = U_0^1 \Psi(x) + U_1^1 \Omega(x) - \int_{x}^{0} \frac{\Psi(x)\Omega(y) - \Omega(x)\Psi(y)}{A} W(y) C^1(y)\, dy \tag{5.10}$$

wird[21]).

[21]) Man vgl. F. RELLICH [12]. Die genaue Literaturangabe ist [13], S. 111.

Unter den Bedingungen (5.8) soll nun etwa $\lim_{x \to 0} U^{1\prime}(x) = 0$ enthalten sein, wofür die Existenz eines Fundamentalsystems $\Psi, \Omega$ von (5.9) mit $\lim_{x \to 0} \Psi'(x) = 0$, $\lim_{x \to 0} \Omega'(x) = \varkappa \neq 0$ notwendig ist. Dafür ist wiederum notwendig, daß $\lim_{x \to 0} A^1(x) \neq 0$ und $\int_{\delta}^{0} C^1(x)\, dx < \infty$ ist. Setzt man nämlich $Y^1 = Z$, $Y^2 = Z'$, so wird

$$Y^2(x) = \frac{1}{A^1(x)} \left\{ A^1(0)\, \varkappa + \mu \int_{x}^{0} C^1(x)\, Y^1(x)\, dx \right\}.$$

Zusammenfassend stellen wir fest, daß die Bedingungen

$$\lim_{x \to 0} A^1(x) \neq 0, \qquad \int_{\delta}^{0} C^1(x)\, dx < \infty \quad \text{mit} \quad r_0 < \delta < 0 \tag{5.11}$$

notwendig für die Lösbarkeit des Randwertproblems (5) mit der Randbedingung $(5.2_2)$ sind. $\Phi_\nu(x, y) = \Phi_i^1(x)\, \Phi_k^2(y)$ ist dann ein in $\mathfrak{R}$ vollständiges System von Eigenfunktionen, wie dies für (5.5) verlangt wurde. Analog ist bei der Randbedingung $(5.2_1)$ zu verfahren.

Betrachtet man (1) in $\mathfrak{r} + \tilde{\mathfrak{r}}$ unter den Voraussetzungen (I) mit (a) oder $(a_1)$ und (II) und will man die Lösung des Randwertproblems $(5.2_2)$ durch Formulierung eines Anfangswertproblems auf $\mathfrak{k}$ stetig differenzierbar über $\mathfrak{k}$ fortsetzen, so ergeben sich mit unseren Betrachtungen in der Einleitung als notwendige Bedingungen für den *elliptisch-parabolischen* Teil ($\tilde{\mathfrak{r}}$) die Bedingungen (5.11), für den *hyperbolisch-parabolischen* Teil ($\mathfrak{r}$) die Bedingungen $a = 0$, $c > -1$ (§ 3, 1. Fall).

Von besonderem Interesse ist der Fall, daß die Koeffizienten $A, C$ in $\mathfrak{r} + \tilde{\mathfrak{r}}$ ein einheitliches Bildungsgesetz haben. Dies ist der Fall, wenn wir etwa mit Vor. (I) und $(a_1)$ (§ 1) setzen:

$$A(x, y) = |x|^a A^1(x)\, A^2(y), \qquad C(x, y) = \operatorname{sign} x\, |x|^c\, C^1(x)\, C^2(y).$$

Dabei sind $A^1(x), A^2(y)$; $C^1(x), C^2(y)$ positiv und stetig differenzierbar in $\mathfrak{r} + \tilde{\mathfrak{r}}$. Dann bedeutet (5.11) einfach $a = 0$, $c > -1$ und dieses sind auch genau die im *hyperbolisch-parabolischen* Teil ($\mathfrak{r}$) zu stellenden notwendigen Bedingungen. Schließlich ist damit auch die in der Einleitung angegebene Auszeichnung des einfachen Gleichungstypus (3) gefunden.

## Literatur.

[1] Agmon, S., L. Nirenberg and M. H. Protter: A maximum principle for a class of hyperbolic equations and applications to equations of mixed elliptic-hyperbolic type. Commun. Pure Applied Math. **6**, 455—471 (1953). — [2] Bers, L.: On the continuation of a potential gas flow across the sonic line. N.A.C.A. Techn. Note No. 2058. 1950. — [3] Frankl, F. J.: Über das Cauchysche Problem für Gleichungen vom gemischten elliptisch-hyperbolischen Typus mit vorgegebenen Anfangsdaten auf der parabolischen Linie. Bull. Acad. Sci. URSS. **8** (1944) (Russisch). — [4] Gellerstedt, S.: Quelques problèmes mixtes pour l'équation $y^m z_{xx} + z_{yy} = 0$. Ark. Math. Astr. Fys. **26** (1937). — [5] Haack, W., u. G. Hellwig: Lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung von gemischtem Typus. Arch. Math. **5**, 60—76 (1954). — [6] Hellwig, G.: Anfangs-

und Randwertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen von wechselndem Typus auf den Rändern. Math. Z. **58**, 337—357 (1953). — [7] Holmgren, E.: Sur un problème aux limites pour l équation $y^m z_{xx} + z_{yy} = 0$. Ark. Math. Astr. Fys. **19** B, No. 14 (1926). — [8] Kamke, E.: Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen. Leipzig 1944. — [9] Kamke, E.: Differentialgleichungen reeller Funktionen. Leipzig 1945. — [10] Protter, M. H.: Uniqueness theorems for the Tricomi problem. J. of Rat. Mech. Analy. **2**, 107—114 (1953). — [11] Protter, M. H.: A boundary value problem for an equation of mixed type. Trans. Amer. Math. Soc. **71**, 416—429 (1953). — [12] Rellich, F.: Halbbeschränkte gewöhnliche Differentialoperatoren zweiter Ordnung. Math. Ann. **122**, 343—368 (1951). — [13] Rellich, F.: Eigenwerttheorie partieller Differentialgleichungen. Vorlesungsausarbeitung W.S. 1952/53 des Math. Inst. Göttingen. — [14] Tricomi, F.: Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine di tipo misto. Atti della Accad. Naz. dei Lin. (5) **14**, 133—247 (1923).

*Zusatz bei der Korrektur.* Läßt man in der Voraussetzung (I) auf S. 29 die Forderungen $c > -1$, $d > -1$ weg, so tritt beim Anfangswertproblem in § 3 ein weiterer Fall auf.

**4. Fall:** $a = 0$, $c > -2$, $(d > -2)$, $f > -1$ mit $g + c > -2$.

**Vorgaben:** $\lim\limits_{x \to 0} u(x, y) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} u_x(x, y) = u_1(y)$.

Vorausgesetzt ist dabei, daß nicht alle Ungleichungen des 1. Falles erfüllt sind. Wir setzen $u = U + x u_1$ und erhalten mit (2.7) $g = \mathrm{Min}\{f, \alpha - 1, c + 1, (d + 1)\}$. Es ist $g > -1$ und Satz 3 kann verwendet werden, da die im Beweis zu $(\gamma)$ benutzte Ungleichung $g - c > -2$ erfüllt ist. Alle Ungleichungen des Satzes 2 sind erfüllt. Die Lösung $u(x, y)$ mit $E[u] < \infty$ hat dieselben Differenzierbarkeitseigenschaften wie im 1. Falle. Auch der Eindeutigkeitssatz 4 bleibt erhalten. Als Beispiel erwähnen wir $u_{xx} - x^c u_{yy} = 0$ mit $-1 \geqq c > -\frac{3}{2}$.

*Berlin-Charlottenburg, Mathematisches Institut der Technischen Universität.*

*(Eingegangen am 13. Juni 1954.)*

NEUMER, W.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 47—69 (1954)

# Zur Konstruktion von Ordnungszahlen. IV.

Von
WALTER NEUMER.

## Vorbemerkung.

In dem nachstehenden vierten Abschnitt dieser Arbeit[1]) werden die Beziehungen zwischen dem ACKERMANNschen Bezeichnungssystem für Ordnungszahlen[2]) und dem in I entwickelten konstruktiven Algorithmus dargestellt. Es zeigt sich (§ 11), daß das $s$-stellige ACKERMANNsche System, d.h. dasjenige, welches eine Klammer mit $s\,(=2, 3, \ldots)$ Leerstellen verwendet, den Abschnitt der Zahlen $< 1VII'^{s-1}$ repräsentiert. Ferner wird ein rekursives Verfahren skizziert, welches für jedes Klammersymbol $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ die ihm gleiche reguläre Zahlenfigur des konstruktiven Algorithmus anzugeben gestattet. Es erscheint daher angebracht, zunächst die allgemeine Form der Zahlen $< 1VII'^{1V}$ im konstruktiven Algorithmus zu charakterisieren; für die Zahlen $< 1VII'$ ist dies in I, § 3 bereits geschehen, so daß jetzt noch die Zahlen zwischen $1VII'$ und $1VII'^{1V}$ zu betrachten wären. Indessen macht es kaum mehr Umstände, die Form der $I'$-Zahlen überhaupt, also der Zahlen $1VII' \leqq \xi < 1VII'I''$ herzuleiten, welcher Aufgabe der § 9 gewidmet ist[3]). Dies ist auch deshalb gerechtfertigt, weil inzwischen von K. SCHÜTTE[4]) eine Verallgemeinerung der ACKERMANNschen Symbolik vorgenommen wurde, mit welcher sich der ganze Abschnitt $[1, 1VII'I'')$ ebenfalls konstruktiv erfassen läßt. Das geht zwar summarisch aus einer einfachen Anwendung des in V zur Darstellung kommenden Algorithmus für Normalfunktionen[5]) hervor, aber wenn man die Beziehungen zwischen der SCHÜTTEschen $\varphi$-Symbolik und dem konstruktiven Algorithmus von I im einzelnen untersuchen will, wird man die Form der $I'$-Zahlen kennen müssen.

## § 9. Die Form der $I'$-Zahlen.

**1.** Zunächst verabreden wir einige Bezeichnungen. Wir betrachten gewisse $n$-tupel $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, wo die $a_i$ irgendeiner geordneten Menge

[1]) Die drei vorangehenden Abschnitte, erschienen in dieser Z. **58**, 391—413 (1953), **59**, 434—454 (1954), **60**, 1—16 (1954), werden als I, II, III zitiert; die Paragraphen sind durchgehend, die Formeln, Sätze und Fußnoten abschnittsweise numeriert.

[2]) Konstruktiver Aufbau eines Abschnitts der zweiten CANTORschen Zahlenklasse. Math. Z. **53**, 403—413 (1951). Diese Arbeit wird im folgenden zitiert als [A].

[3]) Der § 9 gehört an sich zu I, wurde aber dort aus Platzmangel weggelassen.

[4]) Kennzeichnung von Ordnungszahlen durch rekursiv erklärte Funktionen. Math. Annalen **127**, 15—32 (1954).

[5]) Siehe die Vorbemerkung zu I.

entnommen sein sollen. Ist $\mathfrak{a}' = (a_1', \ldots, a_{n'}')$, so sei $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'$ gleichbedeutend mit $n = n'$, $a_1 = a_1', \ldots, a_n = a_n'$. Im Fall $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{a}'$ hat man zwei Möglichkeiten:

(L) $\begin{cases} 1. \text{ Es gibt ein } i \leq \min(n, n'), \text{ so daß } a_1 = a_1', \ldots, a_{i-1} = a_{i-1}' \text{ (falls } i > 1) \\ \quad \text{und } a_i \neq a_i' \text{ gilt; } i \text{ heiße der kritische Index für } \mathfrak{a} \text{ und } \mathfrak{a}'. \\ 2. \text{ Es ist } n \neq n' \text{ und } a_i = a_i' \text{ für } i \leq \min(n, n'). \end{cases}$

Wir setzen fest, daß $\mathfrak{a} < \mathfrak{a}'$ gelten soll in den beiden Fällen:

$$(\text{L } 1) \quad \text{mit} \quad a_i < a_i'; \qquad (\text{L } 2) \quad \text{mit} \quad n < n'.$$

Damit ist die Menge der $\mathfrak{a}$ lexikographisch geordnet.

Wir werden es bei der Beschreibung der $I'$-Zahlen mit regulären Operatoren[6]) erster Stufe von der Form

$$(1) \qquad W = (\ldots((V(II'^{\alpha_1})^{\beta_1})(II'^{\alpha_2})^{\beta_2})\ldots)(II'^{\alpha_h})^{\beta_h} \quad (h = 1, 2, \ldots)$$

zu tun haben, wo die $\alpha_i$ und $\beta_i$ Zahlen $< 1\Gamma II'I''$ bedeuten, die noch gewissen Ungleichungen genügen. Ein solcher Operator ist völlig bestimmt durch die Exponenten erster Stufe $\alpha_i, \beta_i$, so daß wir ihn abgekürzt bezeichnen können durch

$$(2) \qquad W = [(\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_h, \beta_h)] \quad (h = 1, 2, \ldots).$$

Nach der Exponentenregel in I, § 1, **5** werden in (1) Exponenten, die $= 1$ sind, nicht hingeschrieben; sie müssen in (2) natürlich erscheinen. — Beispiele: $VII' = [(1, 1)]$, $VII'^2 = [(2, 1)]$, $V(II'^2)^{1VII'} = [(2, 1VII')]$. — Verstehen wir die Relation $(\alpha, \beta) < (\gamma, \delta)$ wieder im lexikographischen Sinn, dann läßt sich auch die Klasse der Operatoren (2) gemäß den Festsetzungen zu (L) lexikographisch ordnen, indem wir die Paare $(\alpha_i, \beta_i)$ mit den dortigen $a_i$ identifizieren. Wir nennen $W$ *schwächer* als $W''$ oder $W''$ *stärker* als $W$, wenn in diesem Sinne $W < W'$ oder $W' > W$ gilt.

Ferner werden wir von *Quasioperatoren* $\mathfrak{x}$ reden, die in Verbindung mit einem Operator $W$ der Form (1) — oder dem Operator $\Gamma$ — und einer geeigneten Zahl $\psi < 1VII'I''$ eine reguläre Zahl der Form

$$(3) \qquad \begin{cases} \psi^* = (\ldots((\psi(WI^{\gamma_1})^{\delta_1})(WI^{\gamma_2})^{\delta_2})\ldots)(WI^{\gamma_m})^{\delta_m})\, W^{\varepsilon} = \mathfrak{x}(\psi, W) \\ \quad (W \text{ hat die Gestalt (1) oder es ist } W = V) \end{cases}$$

hervorbringen. Darin sind alle $\gamma_i, \delta_i$ sowie $\varepsilon$ Zahlen $< 1\Gamma II'I''$, die noch gewissen Ungleichungen genügen. In (3) kann die Potenz $W^{\varepsilon}$ auch fehlen. $m$ kann jede natürliche Zahl 1, 2, ... sein. Es können aber auch alle rechts von $\psi$ stehenden Kombinationen $(WI^{\gamma_i})^{\delta_i}$ fehlen, so daß $\psi^* = \psi W^{\varepsilon}$ wird; $W^{\varepsilon}$ kann dann nicht fehlen.

Den durch die Exponenten $\gamma_i, \delta_i, \varepsilon$ bestimmten Quasioperator $\mathfrak{x}$ schreiben wir abgekürzt:

$$(4) \qquad \mathfrak{x} = \big((\gamma_1, \delta_1), \ldots, (\gamma_m, \delta_m), (\varepsilon)\big).$$

[6]) Siehe I, § 1, **1** und **2**.

In (4) rechts darf nach dem zu (3) Gesagten $(\varepsilon)$ fehlen; ebenso dürfen alle $(\gamma_i, \delta_i)$ fehlen, d. h. $\mathfrak{x} = ((\varepsilon))$ werden. — Beispiele: $1WI = \mathfrak{x}(1, W)$ mit $\mathfrak{x} = ((1, 1))$; $1W = \mathfrak{x}(1, W)$ mit $\mathfrak{x} = ((1))$; $((1VII')\,(VI^2)^3)\,V^2 = \mathfrak{x}(1VII', V)$ mit $\mathfrak{x} = ((2, 3), (2))$. — Auch die $\mathfrak{x}$ lassen sich analog wie die $W$ lexikographisch ordnen, wenn wir noch festsetzen, daß stets $(\varepsilon) < (\gamma, \delta)$ und $(\varepsilon) < (\varepsilon')$ für $\varepsilon < \varepsilon'$ gelten soll.

Wenn $\mathfrak{x}$ nicht die Form $((\varepsilon))$ hat, definieren wir im Hinblick auf seine Form (4):

$$\bar{\mathfrak{x}} = ((\gamma_1, \delta_1), \ldots, (\gamma_m, \delta_m)). \tag{5}$$

$\mathfrak{x} = \bar{\mathfrak{x}}$ besagt also, daß $(\varepsilon)$ in (4) fehlt; wenn $\mathfrak{x} = ((\varepsilon))$, so sagen wir, daß $\bar{\mathfrak{x}}$ nicht existiert.

Ist $\mathfrak{x}' = ((\gamma_1', \delta_1'), \ldots, (\gamma_{m'}', \delta_{m'}'), (\varepsilon'))$, so bestehen für das Zustandekommen von $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{x}'$ nach (L) die folgenden Möglichkeiten[7]:

(Q)
1. $\bar{\mathfrak{x}}$ und $\bar{\mathfrak{x}}'$ existieren und stehen in der Beziehung (L 1).
2. $\bar{\mathfrak{x}}$ und $\bar{\mathfrak{x}}'$ existieren und stehen in der Beziehung (L 2).
3. $\bar{\mathfrak{x}} = \bar{\mathfrak{x}}'$, $\varepsilon \neq \varepsilon'$.
4. $\bar{\mathfrak{x}} = \bar{\mathfrak{x}}'$, wobei entweder $\mathfrak{x} = \bar{\mathfrak{x}}$ und $\mathfrak{x}' \neq \bar{\mathfrak{x}}'$ oder $\mathfrak{x}' = \bar{\mathfrak{x}}'$ und $\mathfrak{x} \neq \bar{\mathfrak{x}}$.
5. $\mathfrak{x} = ((\varepsilon))$, $\mathfrak{x}' = ((\varepsilon'))$, $\varepsilon \neq \varepsilon'$.
6. Entweder $\mathfrak{x} = ((\varepsilon))$ und $\bar{\mathfrak{x}}'$ existiert oder $\mathfrak{x}' = ((\varepsilon'))$ und $\bar{\mathfrak{x}}$ existiert.

Demnach gilt $\mathfrak{x} < \mathfrak{x}'$ in den folgenden Fällen:

(Q 1) mit $(\gamma_i, \delta_i) < (\gamma_i', \delta_i')$ ($i$ = kritischer Index); (Q 2) mit $m < m'$; (Q 3) mit $\varepsilon < \varepsilon'$; (Q 4) mit $\mathfrak{x} = \bar{\mathfrak{x}}$; (Q 5) mit $\varepsilon < \varepsilon'$; (Q 6) mit $\mathfrak{x} = ((\varepsilon))$. $\mathfrak{x}$ heiße wieder schwächer als $\mathfrak{x}'$ oder $\mathfrak{x}'$ stärker als $\mathfrak{x}$, wenn $\mathfrak{x} < \mathfrak{x}'$ oder $\mathfrak{x}' > \mathfrak{x}$ gilt.

**2.** Jede reguläre $I'$-Zahl, d. h. jede Zahl aus $(1VII', 1VII'')$ besitzt einen größten Anfang der Form $1VII'^{\alpha_{11}}$, wo $\alpha_{11}$ ihrerseits eine bereits konstruierte Zahl $< 1VII'I''$ ist (vgl. **I**, § 2, **2** und **3**); mit dem Hinschreiben von $\alpha_{11}$ soll also die Konstruktion im Exponenten von $I'$ beendet sein. $II'^{\alpha_{11}}$ ist ein auf $V$ ausgeübter Operator zweiter Stufe. Wir können ihn noch mit einer Zahl $\beta_{11} < 1VII'^{\alpha_{11}+1} = 1V(II'^{\alpha_{11}})I'$ potenzieren, mit deren Hinschreiben die Konstruktion im Exponenten von $(II'^{\alpha_{11}})$ beendet sein soll. Dann haben wir den Anfang $1V(II'^{\alpha_{11}})^{\beta_{11}}$ für unsere $I'$-Zahl. Hierin ist $V(II'^{\alpha_{11}})^{\beta_{11}}$ ein Operator erster Stufe, der einem Operator zweiter Stufe unterworfen werden kann. Dieser darf, wenn $\alpha_{11} > 1$ ist, jede Form $II'^{\alpha_{12}}$ mit $\alpha_{12} < \alpha_{11}$ haben. Denn nach dem zweiten Konstruktionsprinzip (**I**, § 1, **3**) können wir von $1V(II'^{\alpha_{11}})^{\beta_{11}}$ aus die Figur $1\big(V(II'^{\alpha_{11}})^{\beta_{11}}\big)II'$ und durch Konstruktion im Exponenten des zweiten $I'$ der Grundzeile alle Figuren $1\big(V(II'^{\alpha_{11}})^{\beta_{11}}\big)II'^{\mu}$ mit $\mu < \alpha_{11}$ bilden. An sich dürfen wir auch $\mu = \alpha_{11}$ machen, aber dann bekommen wir die Hilfsfigur $1\big(V(II'^{\alpha_{11}})^{\beta_{11}}\big)II'^{\alpha_{11}}$, welche durch die reguläre Figur $1V(II'^{\alpha_{11}})^{\beta_{11}+1}$ zu ersetzen ist; wir wollten aber den Exponenten $\beta_{11}$ nicht mehr vergrößern. [Im Fall $\alpha_{11} = 1$ dürfen wir auf Grund dieses Entschlusses überhaupt keinen Operator der Form $II'^{\alpha_{12}}$ mehr auf $V(II')^{\beta_{11}}$ ausüben.]

[7]) Die Relation $\bar{\mathfrak{x}} = \bar{\mathfrak{x}}'$ soll die Existenz von $\bar{\mathfrak{x}}$ und $\bar{\mathfrak{x}}'$ implizieren.

Den Operator $II'^{\alpha_{12}}$ können wir wieder mit einem Exponenten $\beta_{12}$ versehen, der jetzt durch die Bedingung $\beta_{12} < 1\big(V(II'^{\alpha_{11}})^{\beta_{11}}\big) II'^{\alpha_{12}+1}$ beschränkt ist. Damit gewinnen wir den Anfang $1\big(V(II'^{\alpha_{11}})^{\beta_{11}}\big)\ (II'^{\alpha_{12}})^{\beta_{12}}$, worin die Zeichengruppe hinter 1 ein Operator erster Stufe ist, den wir im Falle $\alpha_{12} > 1$ einem Operator zweiter Stufe $II'^{\alpha_{13}}$ mit $\alpha_{13} < \alpha_{12}$ unterwerfen können usw. Indem wir so fortfahren, gelangen wir etwa nach $h_1$ Schritten zu folgendem Schema einer regulären Zahlenfigur (vgl. die Exponentenregel **I**, § 1, **5**):

$$(6_1)\quad \begin{cases} 1W_1 = 1\big(\ldots((V(II'^{\alpha_{11}})^{\beta_{11}})\ (II'^{\alpha_{12}})^{\beta_{12}})\ldots\big)\ (II'^{\alpha_{1h_1}})^{\beta_{1h_1}}, \\ 1VII'I'' > \alpha_{11} > \alpha_{12} > \cdots > \alpha_{1h_1} \geqq 1, \qquad \beta_{11} < 1VII'^{\alpha_{11}+1}, \\ \beta_{12} < 1\big(V(II'^{\alpha_{11}})^{\beta_{11}}\big) II'^{\alpha_{12}+1}, \ldots, \beta_{1h_1} < 1\big(\ldots(V(II'^{\alpha_{11}})^{\beta_{11}})\ldots\big) II'^{\alpha_{1h_1}+1}. \end{cases}$$

Jede $I'$-Zahl hat also einen größten Anfang der Form $(6_1)$, der dann nicht mehr in der bisherigen Weise, nämlich durch Anhängen von Kombinationen $(II'^{\alpha})^{\beta}$ vergrößert wird. — Es bestehen die Ungleichungen:

$$(\bar{6}_1)\quad \begin{cases} 1W_1 < 1W_1 II' \leqq 1\big(\ldots(V(II'^{\alpha_{11}})^{\beta_{11}})\ldots\big)\ (II'^{\alpha_{1h_1}})^{\beta_{1h_1}-1} < \\ \quad < 1\big(\ldots(V(II'^{\alpha_{11}})^{\beta_{11}})\ldots\big) II'^{\alpha_{1h_1}+1} \leqq \cdots \leqq \\ \quad \leqq 1\big(V(II'^{\alpha_{11}})^{\beta_{11}}\big)\ (II'^{\alpha_{12}})^{\beta_{12}+1} < 1\big(V(II'^{\alpha_{11}})^{\beta_{11}}\big) II'^{\alpha_{12}+1} \leqq \\ \quad \leqq 1V(II'^{\alpha_{11}})^{\beta_{11}+1} < 1VII'^{\alpha_{11}-1} < 1VII'I''. \end{cases}$$

Man bemerkt die formale Analogie zwischen $(6_1)$ bzw. $(\bar{6}_1)$ und den Relationen (22) bzw. (24) in **I**, § 3, **2**.

Nach (1) und (2) können wir setzen:

$$W_1 = [(\alpha_{11}, \beta_{11}), \ldots, (\alpha_{1h_1}, \beta_{1h_1})].$$

Ist $1W_1'$ eine zweite Zahl der Form $(6_1)$, worin

$$W_1' = [(\alpha_{11}', \beta_{11}'), \ldots, (\alpha_{1h_1'}', \beta_{1h_1'}')],$$

so gilt $1W_1 = 1W_1'$ nur im Fall der Identität $W_1 = W_1'$. Ist $1W_1 \neq 1W_1'$, so muß entweder $W_1 < W_1'$ oder $W_1' < W_1$ sein. Man erkennt leicht, daß $1W_1 < 1W_1'$ und $W_1 < W_1'$ äquivalente Relationen sind; im Fall (L 2) ist dies trivial und im Fall (L 1) überzeugt man sich davon an Hand der Ungleichungen $(\bar{6}_1)$ durch eine analoge Betrachtung, wie sie in **I**, § 3, **2** bezüglich (H' 1) angestellt wurde.

**3.** Wenn eine Zahl $(6_1)$ der größte Anfang dieser Art einer $I'$-Zahl sein soll, dann dürfen wir ihn nur noch so vergrößern, daß reguläre Zahlenfiguren $< 1W_1 II'$ entstehen. Die hierhergehörige Betrachtung wollen wir nachher unter allgemeineren Voraussetzungen durchführen. Zunächst nehmen wir daher an, wir hätten bereits eine Reihe von Anfängen $\psi_1 < \cdots < \psi_{j-1}$ $(j \geqq 2)$ für unsere $I'$-Zahl konstruiert, wobei $\psi_1 \geqq 1W_1$ und $\psi_{j-1} = \bar{\psi}_{j-1} W_{j-1}^{\varepsilon_{j-1}}$ ist[8]), und es sei mit dem Hinschreiben von $\varepsilon_{j-1}$ die Konstruktion im Exponenten von $W_{j-1}$ beendet; $W_{j-1}$ soll ein Operator der Form (1) sein, also

$$W_{j-1} = [(\alpha_{j-1,1}, \beta_{j-1,1}), \ldots, (\alpha_{j-1,h_{j-1}}, \beta_{j-1,h_{j-1}})],$$

[8]) Es kann auch $\psi_{j-1} = \bar{\psi}_{j-1}$ sein; s. unten **4**.

worin $\alpha_{j-1,1} > \cdots > \alpha_{j-1,h_{j-1}} \geqq 1$ ist und die $\beta_{j-1,i}$ ebenfalls gewissen Ungleichungen genügen. Dann können wir $\psi_{j-1}$ nur noch durch Anhängen solcher Zeichenkombinationen vergrößern, daß reguläre Zahlenfiguren $\cdots \psi_{j-1} W_{j-1} = \bar{\psi}_{j-1} W_{j-1}^{\varepsilon_{j-1}+1}$ entstehen[9]).

Unter diesen Umständen können wir nach dem zweiten Konstruktionsprinzip die Figur $\psi_{j-1} V I I'^{\alpha_{j1}}$ bilden mit $\alpha_{j1} \geqq \alpha_{j-1,1}$. Wird $\alpha_{j1} = \alpha_{j-1,1}$ gewählt, so können wir auch $\psi_{j-1} V (I I'^{\alpha_{j-1,1}})^{\beta_{j1}}$ mit $\beta_{j1} \geqq \beta_{j-1,1}$ bilden, und wenn noch $\beta_{j1} = \beta_{j-1,1}$ genommen wird, so dürfen wir auch zu $\psi_{j-1} \left(V (I I'^{\alpha_{j-1,1}})^{\beta_{j-1,1}}\right) I I'^{\alpha_{j2}}$ mit $\alpha_{j2} \leqq \alpha_{j-1,2}$ übergehen, im Fall $\alpha_{j2} = \alpha_{j-1,2}$ dann zu

$$\psi_{j-1} \left(V (I I'^{\alpha_{j-1,1}})^{\beta_{j-1,1}}\right) (I I'^{\alpha_{j-1,2}})^{\beta_{j2}} \quad \text{mit} \quad \beta_{j2} \leqq \beta_{j-1,2}$$

fortschreiten usw. Wir dürfen aber nicht dauernd $\alpha_{ji} = \alpha_{j-1,i}$ und $\beta_{ji} = \beta_{j-1,i}$ machen, weil wir sonst nach $h_{j-1}$ Schritten zu der Zahl $\psi_{j-1} W_{j-1}$ gelangen würden. Also müssen wir entweder für ein $i_j < h_{j-1}$ zum erstenmal eine Wahl $(\alpha_{ji_j}, \beta_{ji_j}) < (\alpha_{j-1,i_j}, \beta_{j-1,i_j})$ treffen oder wir müssen schon nach einem $i_j < h_{j-1}$ mit dem Anhängen von Kombinationen $(I I'^{\alpha})^{\beta}$ aufhören. Im ersten Fall können wir, wenn $\alpha_{ji_j} > 1$, noch einen Operator $I I'^{\alpha_{ji_j+1}}$ ausüben mit $\alpha_{ji_j} < \alpha_{ji_j-1} \leqq \alpha_{j-1,i_j}$, und die weitere Konstruktion vollzieht sich analog derjenigen, welche zu $(6_1)$ geführt hat. Somit ergibt sich als neuer Anfang für die zu bildende $I'$-Zahl die reguläre Zahlenfigur

$$(6_j) \qquad \begin{cases} \psi_{j-1} W_j = \psi_{j-1} \left(\ldots (V (I I'^{\alpha_{j1}})^{\beta_{j1}}) \ldots\right) (I I'^{\alpha_{jh_j}})^{\beta_{jh_j}}, \\ \alpha_{j-1,1} \geqq \alpha_{j1} > \alpha_{j2} > \cdots > \alpha_{jh_j} \geqq 1, \qquad W_j < W_{j-1} \quad (j \geqq 2). \end{cases}$$

Wenn dabei hinsichtlich $W_j < W_{j-1}$ der Fall (L 1) vorliegt mit $i_j$ als kritischem Index, so bestehen die Ungleichungen

$$(6_j') \qquad \begin{cases} \beta_{ji_j} < \psi_{j-1} \left(\ldots (V (I I'^{\alpha_{j1}})^{\beta_{j1}}) \ldots\right) I I'^{\alpha_{ji_j}+1}, \\ \beta_{j,i_j+1} < \psi_{j-1} \left(\ldots (V (I I'^{\alpha_{j1}})^{\beta_{j1}}) \ldots\right) I I'^{\alpha_{j,i_j+1}+1}, \ldots, \\ \beta_{jh_j} < \psi_{j-1} \left(\ldots (V (I I'^{\alpha_{j1}})^{\beta_{j1}}) \ldots\right) I I'^{\alpha_{jh_j}+1} \quad (j \geqq 2), \end{cases}$$

von denen die erste nur im Fall $\alpha_{ji_j} < \alpha_{j-1,i_j}$ konstruktiv sinnvoll und im Fall $\alpha_{ji_j} = \alpha_{j-1,i_j}$ durch $\beta_{ji_j} < \beta_{j-1,i_j}$ zu ersetzen ist.

Stehen $W_j$ und $W_{j-1}$ in der Beziehung (L 1) und ist dabei $\alpha_{ji_j} < \alpha_{j-1,i_j}$, so haben wir die Kette von Ungleichungen:

$$(\bar{6}_j) \qquad \begin{cases} \psi_{j-1} W_j < \psi_{j-1} W_j I I' \leqq \psi_{j-1} \left(\ldots (V (I I'^{\alpha_{j1}})^{\beta_{j1}}) \ldots\right) (I I'^{\alpha_{jh_j}})^{\beta_{jh_j}+1} < \\ \quad < \psi_{j-1} \left(\ldots (V (I I'^{\alpha_{j1}})^{\beta_{j1}}) \ldots\right) I I'^{\alpha_{jh_j}+1} \leqq \cdots \leqq \\ \quad \leqq \psi_{j-1} \left(\ldots (V (I I'^{\alpha_{j1}})^{\beta_{j1}}) \ldots\right) (I I'^{\alpha_{ji_j+1}})^{\beta_{ji_j+1}+1} < \\ \quad < \psi_{j-1} \left(\ldots (V (I I'^{\alpha_{j1}})^{\beta_{j1}}) \ldots\right) I I'^{\alpha_{j,i_j+1}+1} \leqq \\ \quad \leqq \psi_{j-1} \left(\ldots (V (I I'^{\alpha_{j1}})^{\beta_{j1}}) \ldots\right) (I I'^{\alpha_{ji_j}})^{\beta_{ji_j}+1} < \\ \quad < \psi_{j-1} \left(\ldots (V (I I'^{\alpha_{j1}})^{\beta_{j1}}) \ldots\right) I I'^{\alpha_{ji_j}+1} \leqq \psi_{j-1} W_{j-1} \quad (j \geqq 2). \end{cases}$$

[9]) Die Schranke $\psi_{j-1} W_{j-1}$ muß auch im Fall $\psi_{j-1} = \bar{\psi}_{j-1}$ unterschritten werden.

Ist jedoch $\alpha_{ji_j} = \alpha_{j-1,i_j}$, so fällt in $(\bar{6}_j)$ die vorletzte Zahlenfigur einschließlich des vorangehenden Zeichens $<$ weg. — Stehen $W_j$ und $W_{j-1}$ in der Beziehung (L 2), so reduziert sich die Ungleichungenkette $(\bar{6}_j)$ auf $\psi_{j-1} W_j < \psi_{j-1} W_j I I' \leq \psi_{j-1} W_{j-1}$.

Sei $\psi_{j-1} W_j'$ eine zweite Zahl der Form $(6_j)$ mit

$$W_j' = [(\alpha_{j1}', \beta_{j1}'), \ldots, (\alpha_{j\kappa_j}', \beta_{j\kappa_j}')].$$

Es gilt $\psi_{j-1} W_j' = \psi_{j-1} W_j$ nur im Fall der Identität $W_j = W_j'$. Wenn $\psi_{j-1} W_j' \neq \psi_{j-1} W_j$ ist, so muß $W_j < W_j'$ oder $W_j' < W_j$ sein. Man überzeugt sich leicht, daß $\psi_j W_j < \psi_j W_j'$ mit $W_j < W_j'$ äquivalent ist; das erfordert nur eine Erörterung, wenn $W_j < W_j'$ unter der Bedingung (L 1) gilt. Sei $k$ der kritische Index für $W_j$ und $W_j'$. Wegen $W_j' < W_{j-1}$ können $W_j$ und $W_{j-1}$ nicht in der Beziehung (L 2) stehen; es gibt also einen kritischen Index $i_j$ für $W_j$ und $W_{j-1}$, wobei $i_j \leq k$ sein muß. Somit hat man $(\alpha_{ji_j}, \beta_{ji_j}) \leq (\alpha_{ji_j}', \beta_{ji_j}') < (\alpha_{j-1,i_j}, \beta_{j-1,i_j})$. Ist $i_j < k$, so schließt man wie am Ende von **2**. Ist $i_j = k$, so stellt, wegen der Regularität von $\psi_{j-1} W_j'$, im Fall $\alpha_{jk} < \alpha_{jk}'$ die vorletzte und im Fall $\alpha_{jk} = \alpha_{jk}'$, $\beta_{jk} < \beta_{jk}'$ die drittletzte Zahlenfigur in $(\bar{6}_j)$ ein (reguläres) Zwischenstadium in der Konstruktion von $\psi_{j-1} W_j'$ dar.

**4.** Nun verabreden wir, daß $\psi_0$ die Zahl 1 bedeute und konstruieren von $\psi_{j-1} W_j$ $(j \geq 1)$ aus weiter, indem wir diese Zahlenfigur als einen Anfang ansehen, der nicht mehr durch Anhängen von Kombinationen $(I I'^{\alpha})^{\beta}$ an $W_j$ vergrößert werden soll. Die betreffende $I'$-Zahl muß daher unterhalb $\psi_{j-1} W_j I I'$ bleiben. Bei dieser Beschränkung können wir dann $\psi_{j-1} W_j I^{\gamma_{j1}}$ mit $\gamma_{j1} < \psi_{j-1} W_j I I'$ bilden, darauf den Operator erster Stufe $W_j I^{\gamma_{j1}}$ noch potenzieren usw. Durch eine ganz analoge Betrachtung, wie sie in I, § 3, **2** zur Gewinnung von (22) gedient hat, gelangen wir zu folgendem Schema einer regulären Zahlenfigur:

$$(7_j) \quad \begin{cases} \varphi_j = \big(\ldots((\psi_{j-1}(W_j I^{\gamma_{j1}})^{\delta_{j1}})\,(W_j I^{\gamma_{j2}})^{\delta_{j2}})\ldots\big)\,(W_j I^{\gamma_{jm_j}})^{\delta_{jm_j}}, \\ \psi_{j-1} W_j I I' > \gamma_{j1} > \gamma_{j2} > \cdots > \gamma_{jm_j} \geq 1, \qquad \delta_{j1} < \psi_{j-1} W_j I^{\gamma_{j1}+1}, \\ \delta_{j2} < \big(\psi_{j-1}(W_j I^{\gamma_{j1}})^{\delta_{j1}}\big) W_j I^{\gamma_{j2}+1}, \ldots, \\ \delta_{jm_j} < \big(\ldots(\psi_{j-1}(W_j I^{\gamma_{j1}})^{\delta_{j1}})\ldots\big) W_j I^{\gamma_{jm_j}+1} \qquad (j \geq 1,\ \psi_0 = 1). \end{cases}$$

Wenn wir nun auf die Hinzufügung von Kombinationen $(W_j I^{\gamma})^{\delta}$ verzichten, kann $\varphi_j$ nur noch so vergrößert werden, daß wir unterhalb $\varphi_j W_j I$ bleiben, was uns erlaubt, zu

$$(8_j) \qquad \psi_j = \varphi_j W_j^{\varepsilon_j}, \qquad \varepsilon_j < \varphi_j W_j I \qquad (j \geq 1)$$

überzugehen. — Auf diese Weise kommt man von $\psi_{j-1}$ zu $\psi_j$. Man kann natürlich die Zwischenstation $(8_j)$ auslassen, in welchem Fall $\psi_j = \varphi_j$ sein soll; aber auch $(7_j)$ kann man sparen und setzen:

$$(8_j') \qquad \psi_j = \psi_{j-1} W_j^{\varepsilon_j}, \qquad \varepsilon_j < \psi_{j-1} W_j I \qquad (j \geq 1).$$

$(8_j)$ und $(8'_j)$ lassen sich zusammenfassen zu

$$(9_j) \qquad \psi_j = \bar{\psi}_j W_j^{\varepsilon_j}, \qquad \varepsilon_j < \bar{\psi}_j W_j I \qquad (j \geqq 1),$$

worin $\bar{\psi}_j = \varphi_j$ oder $= \psi_{j-1}$ ist. Im Fall $\psi_j = \varphi_j$ setzen wir ebenfalls $\bar{\psi}_j = \varphi_j$.

Analog zu **I**, § 3, (24) haben wir die Ungleichungen:

$$(\bar{9}_j) \quad \begin{cases} \psi_j = \bar{\psi}_j W_j^{\varepsilon_j} < \psi_j W_j = \bar{\psi}_j W_j^{\varepsilon_j+1} < \bar{\psi}_j W_j I \leqq \\ \quad \leqq (\ldots(\psi_{j-1}(W_j I^{\gamma_{j1}})^{\delta_{j1}})\ldots)\,(W_j I^{\gamma_{jm_j}})^{\delta_{jm_j}+1} < \\ \quad < (\ldots(\psi_{j-1}(W_j I^{\gamma_{j1}})^{\delta_{j1}})\ldots)\, W_j I^{\gamma_{jm_j}+1} \leqq \ldots \leqq \\ \quad \leqq (\psi_{j-1}(W_j I^{\gamma_{j1}})^{\delta_{j1}})\,(W_j I^{\gamma_{j2}})^{\delta_{j2}+1} < (\psi_{j-1}(W_j I^{\gamma_{j1}})^{\delta_{j1}})\, W_j I^{\gamma_{j2}+1} \leqq \\ \quad \leqq \psi_{j-1}(W_j I^{\gamma_{j1}})^{\delta_{j1}+1} < \psi_{j-1} W_j I^{\gamma_{j1}+1} < \psi_{j-1} W_j I I' \qquad (j \geqq 1). \end{cases}$$

Wenn $\psi_j = \bar{\psi}_j$ ist, müssen wir in $(\bar{9}_j)$ natürlich die zweite und die vierte Zahlenfigur fortlassen; im Fall $(8'_j)$, also für $\bar{\psi}_j = \psi_{j-1}$, reduziert sich die Kette von Ungleichungen $(\bar{9}_j)$ auf

$$\psi_j = \bar{\psi}_j W_j^{\varepsilon_j} < \psi_j W_j = \bar{\psi}_j W_j^{\varepsilon_j+1} < \bar{\psi}_j W_j I < \psi_{j-1} W_j I I'.$$

Im Hinblick auf (3) und (4) schreiben wir

$$(10_j) \qquad \psi_j = \mathfrak{x}_j(\psi_{j-1}, W_j), \qquad \mathfrak{x}_j = \big((\gamma_{j1}, \delta_{j1}), \ldots, (\gamma_{jm_j}, \delta_{jm_j}), (\varepsilon_j)\big) \qquad (j \geqq 1).$$

In $\mathfrak{x}_j$ können die Glieder $(\gamma_{ji}, \delta_{ji})$ fehlen (Fall $(8'_j)$) oder es kann das Glied $(\varepsilon_j)$ fehlen (Fall $\psi_j = \bar{\psi}_j = \varphi_j$). — Ist $\psi'_j = \mathfrak{x}'_j(\psi_{j-1}, W_j)$ eine zweite Zahl der Form $(9_j)$, so wird $\psi_j = \psi'_j$ nur, wenn $\mathfrak{x}_j = \mathfrak{x}'_j$ ist. Man sieht leicht ein, daß $\psi_j < \psi'_j$ mit $\mathfrak{x}_j < \mathfrak{x}'_j$ äquivalent ist [im Fall $(\mathrm{Q}\,1)$ zieht man $(\bar{9}_j)$ heran und schließt wie in **I**, § 3, **2** bezüglich $(\mathrm{H}'\,1)$].

**5.** Die Ziffern **2** bis **4** zeigen, wie man sich von der zu konstruierenden $I'$-Zahl eine Reihe wachsender Anfänge $\psi_0 = 1, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_s$ der Form $(9_j)$ $(j = 1, \ldots, s)$ entstanden denken kann. Soll $\psi_s$ der größte Anfang dieser Art für die betreffende Zahl sein, dann können wir $\psi_s$ nicht mehr durch Ausübung von Operatoren $V(I I'^{\alpha})^{\beta}$ und die daran anschließenden, bisher beschriebenen Konstruktionen vergrößern, aber wir können immer noch Kombinationen der Form $(V I^{\mu})^{\nu}$ anfügen. So erhalten wir eine reguläre Zahlenfigur $< \psi_s V I I'$, die wir wieder in der Form

$$(10_{s+1}) \qquad \chi = \psi_{s+1} = \mathfrak{x}_{s+1}(\psi_s, V), \qquad V = W_{s+1}$$

schreiben, so daß die Relationen $(7_j)$ bis $(9_j)$ auch für $j = s+1$ in Anspruch genommen werden können.

Die Zahl $\chi$ ist offenbar bestimmt durch das System der Operatoren $W$ und der Quasioperatoren $\mathfrak{x}_j$. Daher kürzen wir ab:

$$(11) \qquad \chi = \langle (W_1, \mathfrak{x}_1), \ldots, (W_s, \mathfrak{x}_s), (V, \mathfrak{x}_{s+1}) \rangle \qquad (s \geqq 1).$$

In (11) kann der Quasioperator $\mathfrak{x}_{s+1}$ fehlen, d. h. $\chi = \psi_s$ sein, in welchem Fall wir in (11) das Glied $(V, \mathfrak{x}_{s+1})$ weglassen.

Aus $(\bar{9}_1)$, $(\bar{6}_2)$, $(\bar{9}_2)$, ..., $(\bar{9}_{s-1})$, $(\bar{6}_s)$, $(\bar{9}_s)$ und $(\bar{9}_{s+1})$ entnimmt man der Reihe nach die Ungleichungen

$$(12)\qquad \begin{cases} 1W_1\,II' > \psi_1 W_1 \geq \psi_1 W_2\,II' > \psi_2 W_2 \geq \cdots > \psi_{s-1} W_{s-1} \geq \\ \qquad\qquad \geq \psi_{s-1} W_s\,II' > \psi_s W_s \geq \psi_s V\,II' > \chi V > \chi. \end{cases}$$

Ist $\chi$ der größte Anfang dieser Form unserer $I'$-Zahl, so kann $\chi$ nur noch additiv, d.h. nicht mehr durch Ausübung von Operatoren auf $\chi$, vergrößert werden. Da $\chi$ offenbar Hauptzahl ist (vgl. I, § 1, **5**, erster Absatz), so haben alle Haupt-$I'$-Zahlen die Form $(10_{s+1})$.

Man überzeugt sich unmittelbar vom Bestehen der Ungleichungen:

$$(13\,a)\qquad \psi_{j-1} W_j\,II' \leq \psi_{j-1} W_j' \quad \text{für} \quad W_j < W_j' \qquad (j = 1, \ldots, s;\ \psi_0 = 1)$$

$$(13\,b)\qquad \begin{cases} \psi_j W_j \leq \psi_j' = \mathfrak{x}_j'(\psi_{j-1}, W_j) \quad \text{für} \quad \mathfrak{x}_j < \mathfrak{x}_j' \\ \qquad (j = 1, \ldots, s+1;\ W_{s-1} = V,\ \psi_{s-1} = \chi,\ \psi_{s+1}' = \chi'). \end{cases}$$

Ist $\chi' = \langle (W_1', \mathfrak{x}_1'), \ldots, (W_{s'}', \mathfrak{x}_{s'}'), (V, \mathfrak{x}_{s'-1}') \rangle$ eine zweite Zahl der Form $(10_{s+1})$, so gilt $\chi = \chi'$ nur im Identitätsfall. Für $\chi \neq \chi'$ bestehen folgende Möglichkeiten:

$$(H'')\qquad \begin{cases} 1.\ \text{Es gibt ein } j \leq \min(s, s'), \text{ so daß } W_1 = W_1', \mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x}_1', \ldots, \\ \quad W_{j-1} = W_{j-1}', \mathfrak{x}_{j-1} = \mathfrak{x}_{j-1}' \text{ (falls } j > 1) \text{ und } W_j \neq W_j' \text{ ist.} \\ 2.\ \text{Wie 1., aber es ist noch } W_j = W_j', \text{ dagegen } \mathfrak{x}_j \neq \mathfrak{x}_j'. \\ 3.\ s = s',\ W_j = W_j',\ \mathfrak{x}_j = \mathfrak{x}_j' \text{ für } j \leq s,\ \mathfrak{x}_{s+1} \neq \mathfrak{x}_{s-1}'. \\ 4.\ \text{Wie 3., aber genau eines der Paare } (V, \mathfrak{x}_{s+1}),\ (V, \mathfrak{x}_{s+1}') \text{ fehlt.} \\ 5.\ s \neq s',\ W_j = W_j',\ \mathfrak{x}_j = \mathfrak{x}_j' \text{ für } j \leq \min(s, s'). \end{cases}$$

Die Relation $\chi < \chi'$ findet in den folgenden Fällen statt:

(H'' 1) mit $W_j < W_j'$; (H'' 2) mit $\mathfrak{x}_j < \mathfrak{x}_j'$; (H'' 3) mit $\mathfrak{x}_{s+1} < \mathfrak{x}_{s+1}'$;

(H'' 4) mit fehlendem $(V, \mathfrak{x}_{s+1})$; (H'' 5) mit $s < s'$.

Die beiden letzten Fälle sind trivial. Im Fall (H'' 3) ergibt sich die Behauptung wegen $\psi_s' = \psi_s$ aus (13 b) für $j = s+1$. Im Fall (H'' 2) wird wegen $\psi_{j-1} = \psi_{j-1}'$ vermöge (12) und (13 b): $\chi < \psi_j W_j \leq \psi_j' \leq \chi'$, und im Fall (H'' 1) vermöge (12) und (13 a): $\chi < \psi_{j-1} W_j\,II' \leq \psi_{j-1} W_j' = \psi_{j-1}' W_j' \leq \psi_j' \leq \chi'$.

**6.** Mittels additiver Konstruktion gelangen wir von $\chi$ zu dem allgemeinen Schema I, § 3, (21), worin mindestens $\chi_1$ eine Haupt-$I'$-Zahl ist, die übrigen $\chi_i$ auch Haupt-$I$-Zahlen oder Haupt-$V'$-Zahlen sein können. Das ist also die allgemeine Form der $I'$-Zahlen.

Zwei verschiedene $I'$-Zahlen $\eta$ und $\eta'$ der Form **I**, (21) werden wieder gemäß den aus der Disjunktion (H) in **I**, § 3, **1** folgenden Kriterien verglichen (s. **I**, § 3, **3** sowie die Berichtigung hierzu am Schluß dieses Abschnitts).

Sei $\eta = \chi_1 q_1 + \cdots + \chi_k q_k + r$ eine $I'$-Zahl. Die in den $\chi_i \geqq 1VII'$ auftretenden Exponenten erster Stufe (d.h. die in (11) rechts erscheinenden Zahlen, wenn die Symbole $W_i, x_j$ explizit in der Form (2) bzw. (4) hingeschrieben werden) sind entweder $< 1VII'$ oder sie sind $I'$-Zahlen derselben Form wie $\eta$. Wir nennen $\eta$ *$I'$-einstöckig*, wenn alle Exponenten erster Stufe der $\chi_i \geqq 1VII'$ unterhalb $1VII'$ bleiben, und *$I'$-$(n+1)$-stöckig*, wenn diese Exponenten höchstens *$I'$-$n$-stöckig* (d.h. eventuell auch $< 1VII'$) sind, aber mindestens einer *$I'$-$n$-stöckig* ist. $\eta$ hat einen größten Anfang der Form

$$\sigma = 1VII'^{1VII'^{\cdots^{1VII'^{\alpha^{(e-1)}}}}},$$

wo $\alpha^{(e-1)} < 1VII'$; die *$I'$-$e$-stöckige* Zahl $\sigma$ nennen wir die *$I'$-Spitze* von $\eta$. Analog wie in **I**, § 3, **2** zeigt man, daß

$$1VII'_e \leqq \eta < 1VII'_{e+1}$$

ist, unter $1VII'_n$ das $n$-te Glied der Fundamentalfolge **I**, (17) für $1VII'I''$ verstanden. Also ist $1VII'_e$ die kleinste $I'$-Zahl mit $I'$-$e$-stöckiger Spitze, und für $e' > e$ ist jede $I'$-Zahl mit $I'$-$e'$-stöckiger Spitze größer als jede $I'$-Zahl mit $I'$-$e$-stöckiger Spitze.

Nun läßt sich die rekursive Vergleichung zweier $I'$-Zahlen $\eta = \chi_1 q_1 + \cdots \mp \chi_k q_k \pm r \gtrless \eta' = \chi'_1 q'_1 \pm \cdots + \chi'_{k'} q'_{k'} \pm r'$ folgendermaßen skizzieren. Sind ihre $I'$-Spitzen ungleichstöckig, so sind wir fertig. Andernfalls gehen wir nach **I**, § 3, (H) vor. (H, 2—4) sind triviale Fälle. Im Fall (H 1) sind $\chi_i$ und $\chi'_i$ zu vergleichen. Ist genau eine dieser Zahlen $< 1VII'$ oder sind ihre $I'$-Spitzen ungleichstöckig, so sind wir wieder fertig, und wenn beide $< 1VII'$ sind, verfahren wir nach **I**, § 3, **1**, **2**. Andernfalls ist die Disjunktion (H'') von **5** zu benützen. (H'', 4, 5) sind triviale Fälle. Im Fall (H'' 1) muß man auf die Disjunktion (L) und in den Fällen (H'', 2, 3) auf die Disjunktion (Q) (Ziffer **1**) zurückgehen. (L 2) und (Q 2, 4, 6) sind wieder trivial, dagegen erfordern (L 1) und (Q 1, 3, 5) die Vergleichung zweier Exponenten erster Stufe von $\eta$ und $\eta'$, die wir $\xi$ und $\xi'$ nennen. Die Betrachtung wiederholt sich für $\xi$ und $\xi'$ (wenn nicht der triviale Fall eintritt, daß eine dieser Zahlen $< 1VII'$ wird), aber die $I'$-Stockwerksanzahl von $\xi$ bzw. $\xi'$ ist mindestens um 1 niedriger als bei $\eta$ und $\eta'$. Nach endlich vielen Schritten müssen wir daher bei einem „trivialen" Fall anlangen.

Das Hinschreiben einer $I'$-Zahl erfordert seinerseits „interne" Vergleichungen auf Grund der Ungleichungen für die auftretenden Exponenten und Summanden.

Rückblickend können wir feststellen, daß die Vergleichung zweier $I'$-Zahlen ebenfalls nach dem allgemeinen Rezept von **I**, § 2, **3** verläuft.

## § 10. Einige Eigenschaften des $s$-stelligen Ackermannschen Bezeichnungssystems.

**1.** Das $s$-stellige ACKERMANNsche Bezeichnungssystem ($s = 1, 2, \ldots$), welches wir $\mathfrak{A}_s$ nennen wollen, verwendet nur die Zeichen 1, $+$ und eine Klammer ( ) mit $s$ Leerstellen. $\mathfrak{A}_3$ wurde von W. ACKERMANN in [A] ausführlich beschrieben, wobei der Verfasser bemerkte, daß diese Betrachtungen ohne weiteres für beliebiges $s > 3$ übertragen werden können (sie lassen sich natürlich auch für $s = 1$ und $s = 2$ spezialisieren). Das gilt insbesondere für den Beweis, daß die Symbole des Systems $\mathfrak{A}_s$ wirkliche Ordnungszahlen im gewohnten Sinne sind, so daß wir nach den üblichen Regeln mit ihnen rechnen können. Dies vorausgesetzt, wollen wir einige Definitionen und Eigenschaften von $\mathfrak{A}_s$ für beliebiges $s$ zusammenstellen in der Form, wie sie im § 11 benötigt werden.

Jedes „Symbol" — abgesehen davon, ob es zu $\mathfrak{A}_s$ gehört oder nicht — ist 1 oder von der Form $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$, wo die „Glieder" $\alpha_i$ wieder Symbole sind, oder von der Form $\pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_m$, wobei die $\pi_i$ Symbole 1 oder $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ bedeuten[10]). Aus der Klasse dieser Symbole wird die Unterklasse $\mathfrak{A}_s$ der „Ordnungszahlen" ausgesondert durch folgende Festsetzungen. 1 ist Ordnungszahl. Sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ Ordnungszahlen, so ist auch $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ eine. Sind $\pi_1, \ldots, \pi_m$ Ordnungszahlen von der Form 1 oder $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$, so ist $\pi_1 + \cdots + \pi_m$ genau dann Ordnungszahl, wenn $\pi_1 \geqq \pi_2 \geqq \cdots \geqq \pi_m$ ist. Es wird sich nach Erklärung der Relation $<$ zeigen, daß $1, 1+1, 1+1+1, \ldots$ die sonst mit $1, 2, 3, \ldots$ bezeichneten natürlichen Zahlen sind.

$\alpha = \beta$ bedeutet die figürliche Einerleiheit der Symbole $\alpha$ und $\beta$, $\alpha \neq \beta$ das Gegenteil. Sind $\alpha, \beta$ Ordnungszahlen, so folgt aus $\alpha \neq \beta$ entweder $\alpha < \beta$ oder $\alpha > \beta$. — Bevor wir die Relation $<$ erklären, führen wir noch einige Abkürzungen ein. Zunächst lassen sich alle Systeme $\mathfrak{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, wo die $\alpha_i \in \mathfrak{A}_s$ sind, nach der Festsetzung in § 9, **1** lexikographisch ordnen; wir benötigen im allgemeinen nur die Fälle, wo (L 1) stattfindet, und zwar für $1 \leq n \leq s$, $n = n'$ [einzige Ausnahme: unten $(G_s\, 2)$]. Ist $n = s$, so ist $\mathfrak{a} = \pi \in \mathfrak{A}_s$. Wenn $\pi = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s) \in \mathfrak{A}_s$, $\pi' = (\alpha_1', \ldots, \alpha_s') \in \mathfrak{A}_s$, so schreiben wir natürlich $\pi < \pi'$ an Stelle von $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) < (\alpha_1', \ldots, \alpha_s')$. — Haben wir $n$ Symbole $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$, welche nicht durch Indizes unterschieden sind, so schreiben wir, wo es die Deutlichkeit erfordert, auch $(\alpha, \beta, \ldots, \gamma)_n$ statt $(\alpha, \beta, \ldots, \gamma)$.

Die Relation $<$ für Ordnungszahlen $\in \mathfrak{A}_s$ läßt sich nun rekursiv durch folgende Festsetzungen einführen, von denen man sich an Hand von [A] leicht überzeugt, daß sie für $s = 3$ mit den dortigen Anordnungen äquivalent sind.

$(G_s)$
1. $1 \leq \alpha$.
2. $\pi_1 + \cdots + \pi_m < \pi_1' + \cdots + \pi_{m'}'$ ist äquivalent mit $(\pi_1, \ldots, \pi_m) < (\pi_1', \ldots, \pi_{m'}')$.
3. $\alpha_i < (\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ für $i = 1, \ldots, s$.
4. Ist $\alpha_i < (\alpha_1', \ldots, \alpha_s')$, $\alpha_i' < (\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ für $i = 1, \ldots, s$, so ist $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) < (\alpha_1', \ldots, \alpha_s')$ äquivalent mit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) < (\alpha_1', \ldots, \alpha_s')$.

[10]) Diese Bedeutung soll der Buchstabe $\pi$ in der Folge immer haben.

Folgerungen. Mit $\alpha$ ist $\alpha + 1$ eine Ordnungszahl. — Ferner ergeben sich die Kriterien:

$(G_s')$
1. Aus $\max(\alpha_1', \ldots, \alpha_s') \geqq (\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ folgt $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) < (\alpha_1', \ldots, \alpha_s')$.
2. Aus $\max(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) < (\alpha_1', \ldots, \alpha_s')$ und $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) \prec (\alpha_1', \ldots, \alpha_s')$ folgt $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) < (\alpha_1', \ldots, \alpha_s')$.
3. Aus $\alpha_i \leqq \alpha_i'$ für $i = 1, \ldots, s$ folgt $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) \leqq (\alpha_1', \ldots, \alpha_s')$.
4. Aus $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) < (\alpha_1', \ldots, \alpha_s')$ und $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) > (\alpha_1', \ldots, \alpha_s')$ folgt $\max(\alpha_1', \ldots, \alpha_s') \geqq (\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$.
5. Aus $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) < (\alpha_1', \ldots, \alpha_s')$ und $\max(\alpha_1', \ldots, \alpha_s') < (\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ folgt $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) < (\alpha_1', \ldots, \alpha_s')$.

Nach $(G_s' 3)$ ist $(1, \ldots, 1)_s$ das kleinste Symbol $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) \in \mathfrak{A}_s$ und nach $(G_s, 1, 2)$ die kleinste transfinite Zahl $\omega$.

Bezeichnet man mit $\Gamma_s$ den Limes des Systems $\mathfrak{A}_s$, so gilt

$$\Gamma_s = \lim_n \sigma_n, \quad \text{wo} \quad \sigma_1 = (1, \ldots, 1)_s, \quad \sigma_{n+1} = (\sigma_n, 1, \ldots, 1)_s. \tag{14}$$

Dies ergibt sich durch Induktion nach der Anzahl der in einem Symbol $\in \mathfrak{A}_s$ vorkommenden Zeichen $+$ und $(\,)$. Sei $\vartheta_n$ die größte unter Verwendung von genau $n$ dieser Zeichen herstellbare Zahl $\in \mathfrak{A}_s$ (es gibt ja nur endlich viele Möglichkeiten). Dann ist offenbar $\vartheta_1 = \sigma_1$. Wir zeigen, daß $\vartheta_{n-1} = (\vartheta_n, 1, \ldots, 1)_s$ ist, woraus $\vartheta_n = \sigma_n$ und somit (14) folgt. — Sei $\vartheta_{n+1} = \pi_1 + \cdots + \pi_m$. Wäre $m > 1$, so wäre $\pi_1 \leqq \vartheta_n < (\vartheta_n, 1, \ldots, 1)_s$ und daher auch $\vartheta_{n+1} < (\vartheta_n, 1, \ldots, 1)_s$, was unmöglich. Also ist $\vartheta_{n+1} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$. Wäre $\max(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) < \vartheta_n$, so folgte wieder $\vartheta_{n-1} < (\vartheta_n, 1, \ldots, 1)_s$ nach $(G_s' 2)$. Also muß es ein $\alpha_i = \vartheta_n$ geben und die übrigen $\alpha_k$ dürfen kein Zeichen $+$ und $(\,)$ enthalten, müssen also $= 1$ sein. Nach $(G_s 4)$ wird daher $\vartheta_{n+1} = (\vartheta_n, 1, \ldots, 1)_s$.

Satz 1. *Ist* $\pi_n = (\alpha_1^{(n)}, \ldots, \alpha_s^{(n)}) \in \mathfrak{A}_s$ *eine wachsende Folge, so ist entweder* $\lim_n \pi_n = \Gamma_s$ *oder* $\lim_n \pi_n = (\beta_1, \ldots, \beta_s) \in \mathfrak{A}_s$.

Beweis. Wenn $\lambda = \lim_n \pi_n < \Gamma_s$, so ist $\lambda = \pi_1' + \cdots + \pi_m'$, also $\pi_n < \pi_1'$ für alle $n$. Daraus folgt $\lambda = \pi_1'$.

Satz 2. *Wenn* $\pi = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s) \in \mathfrak{A}_s$, *so ist* $\lim_n \pi \cdot n = \pi \cdot \omega \in \mathfrak{A}_s$ *und* $\lim_n \pi \cdot n = (\beta_1, \ldots, \beta_s)$. — *Alle* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) \in \mathfrak{A}_s$ *sind Zahlen* $\omega^\nu$ *mit* $1 \leqq \nu < \Gamma_s$ *und umgekehrt.*

Beweis. Sei $\lambda = \lim_n \pi \cdot n = \pi \cdot \omega$; wegen $\pi < (\alpha_1 + 1, \ldots, \alpha_s + 1)$ ist $\pi \cdot n = \pi + \cdots + \pi < (\alpha_1 + 1, \ldots, \alpha_s + 1)$ und daher auch $\lambda \leqq (\alpha_1 + 1, \ldots, \alpha_s + 1)$. Ist $\lambda = \pi_1 + \cdots + \pi_m$, so folgt $\pi < \pi_1$, somit $\pi \cdot n < \pi_1$, also $\lambda = \pi_1$. — Sei $\alpha' < \pi = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$, $\alpha' = \pi_1 + \cdots + \pi_m$. Dann wird nach dem Bewiesenen (für $\pi_1 = 1$ trivialerweise) $\alpha' \omega = \pi_1 \omega \leqq \pi$; also muß $\pi = \omega^\nu$ sein. — Daß ein $\omega^\nu < \Gamma_s$ die Form $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) \in \mathfrak{A}_s$ hat, ist nach dem Vorstehenden klar. Für ein $\omega^\nu$, von dem nur $\nu < \Gamma_s$ bekannt ist, folgt aber $\omega^\nu < \Gamma_s$. Denn nach (14) ist $\Gamma_s = \lim(\nu, 1, \ldots, 1)_s$, $\nu < \Gamma_s$. Sei $(\nu, 1, \ldots, 1)_s = \omega^{\mu_\nu}$. Da $\mu_\nu$ mit $\nu$ wächst, ist $\lim_\nu \mu_\nu = \Gamma_s$, daher $\omega^{\Gamma_s} = \Gamma_s > \omega^\nu$.

**2.** Im Fall $s \geqq 2$ führen wir nun die Abkürzung

$$\lambda > (\alpha_1, \ldots, \alpha_p), \qquad 1 \leqq p < s \tag{15}$$

ein, mit welcher wir die Aussagen $\lambda = (\beta_1, \ldots, \beta_s) \in \mathfrak{A}_s$, $\lambda > \alpha_i \in \mathfrak{A}_s$ für $i = 1, \ldots, p$ und $(\beta_1, \ldots, \beta_p) > (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ zusammenfassen. Wenn $\lambda \in \mathfrak{A}_s$, $\alpha_i \in \mathfrak{A}_s$ für $i = 1, \ldots, p < s$, so drücken wir das Nichtstattfinden der Relation (15) aus durch

$$\lambda \sim > (\alpha_1, \ldots, \alpha_p). \tag{15'}$$

Satz 3. *Die Bedingung* $\lambda > (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ *ist hinreichend und notwendig dafür, daß* $\lambda > \mu(\nu) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \nu, 1, \ldots, 1)_s$ *ist für alle* $\nu < \lambda$. — *Niemals ist* $\lambda > (\nu, 1, \ldots, 1)_s$ *für alle* $\nu < \lambda$.

Beweis. Daß die Bedingung hinreicht, folgt aus ($G_s'$ 2). Ihre Notwendigkeit ergibt sich so. Für ein $\lambda = \pi_1 + \cdots + \pi_m$ mit $m > 1$ ist stets

$$\lambda < (\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \pi_1, 1, \ldots, 1)_s$$

bei beliebigen $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ aus $\mathfrak{A}_s$. Aus $\lambda > \mu(\nu)$ für alle $\nu < \lambda$ folgt daher $\lambda = (\beta_1, \ldots, \beta_s)$. Für ein $\nu > \max(\beta_1, \ldots, \beta_s)$ und $< \lambda$ ist $\lambda > \mu(\nu)$ nur auf Grund von ($G_s$ 4) möglich, d. h. man hat $\lambda > \mu(\nu)$ und daher auch $(\beta_1, \ldots, \beta_p) > (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$. Also gilt (15). — Die zweite Aussage folgt analog.

Satz 4. *Die kleinste Zahl* $> (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ *ist gegeben durch*

$$\lambda = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \alpha_p + 1, 1, \ldots, 1)_s.$$

Beweis. Aus $\vartheta = (\xi_1, \ldots, \xi_s) < \lambda$, $\vartheta > (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ folgt nämlich $\vartheta < \lambda$ gemäß ($G_s'$ 5); das führt aber auf den Widerspruch

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) < (\xi_1, \ldots, \xi_p) < (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \alpha_p + 1).$$

Satz 5. *Sei* $\lambda = (\beta_1, \ldots, \beta_s) > (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$. *Es bedeute* $\lambda^*$ *die Zahl* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \alpha_p + 1, 1, \ldots, 1, \lambda)_s$ *oder* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \alpha_p + 1, 1, \ldots, 1, \beta_s + 1)_s$, *je nachdem* $\lambda > (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \alpha_p + 1, 1, \ldots, 1)_{s-1}$ *ist oder nicht. Dann liegt zwischen* $\lambda$ *und* $\lambda^*$ *kein* $\vartheta > (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$. *Im zweiten Fall ist übrigens* $\lambda = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \alpha_p + 1, 1, \ldots, 1, \beta_s)_s$.

Beweis. 1. Sei $\lambda > (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \alpha_p + 1, 1, \ldots, 1)_{s-1}$. Daß $\lambda^* > \lambda$ und $\lambda^* > (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ gilt, ist klar. Angenommen, es gäbe ein $\vartheta = (\xi_1, \ldots, \xi_s) > (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ mit $\lambda < \vartheta < \lambda^*$. Nach ($G_s'$ 5) wäre dann $\vartheta < \lambda^*$, d. h. $(\xi_1, \ldots, \xi_p) < (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \alpha_p + 1)$, und da $(\xi_1, \ldots, \xi_p) > (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$, so hätte man $(\xi_1, \ldots, \xi_p) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \alpha_p + 1)$. Wegen $\vartheta < \lambda^*$ müßte demnach $\vartheta = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \alpha_p + 1, 1, \ldots, 1, \xi_s)_s$ mit $\xi_s < \lambda$ sein. Also wäre nach der Voraussetzung über $\lambda$ und nach ($G_s'$ 2): $\vartheta < \lambda$ — ein Widerspruch.

2. Sei $\lambda \sim > (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \alpha_p + 1, 1, \ldots, 1)_{s-1}$; wegen $\lambda > (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ ist dann $(\beta_1, \ldots, \beta_{s-1}) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \alpha_p + 1, 1, \ldots, 1)_{s-1}$. Also hat $\lambda$ die im Satz 5 angegebene Form. Nun schließt man analog wie im ersten Fall, daß $\vartheta = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \alpha_p + 1, 1, \ldots, 1, \xi_s)_s$ mit $\xi_s < \beta_s + 1$ sein müßte, woraus $\vartheta \leqq \lambda$ folgte, im Widerspruch zu $\vartheta > \lambda$.

Satz 6. *Sei* $\{\lambda^{(\nu)}\}$, $1 \leqq \nu < \Gamma_s$, *die wachsende Folge derjenigen Zahlen* $\in \mathfrak{A}_s$, *welche* $> (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ *sind. Dann ist* $\lambda^{(\nu)}$ *eine stetige Funktion von* $\nu$.

Zum Beweis benützen wir den

Hilfssatz 1. *Sei* $(\gamma_\nu)$, $\nu < \varrho$, $\varrho$ *Limeszahl, eine Folge von Elementen aus einer wohlgeordneten Menge. Dann ist* $(\gamma_\nu)$ *mit einer nicht abnehmenden Teilfolge* $(\gamma_{\nu_\tau})$, $\tau < \varrho' \leqq \varrho$, *konfinal.*

Beweis. In der Menge der verschiedenen $\gamma_\nu$ gibt es ein kleinstes Element $\gamma_{\nu_0}$; wir denken uns dabei $\nu_0$ als den kleinsten Index gewählt, für welchen es in der Folge $(\gamma_\nu)$ auftritt. Angenommen, wir haben bereits eine Teilfolge $\gamma_{\nu_\tau}$, $\tau < \sigma$, gefunden mit der Eigenschaft, daß $\gamma_{\nu_\tau}$ das kleinste Element der Menge der verschiedenen $\gamma_\nu$ mit $\nu > \nu_{\tau'}$ für $\tau' < \tau$ und $\nu_\tau$ der kleinste dabei mögliche Index ist. Ist $\sigma = \sigma' + 1$, so muß $\nu_{\sigma'} < \varrho$ sein; in der Restfolge der $\gamma_\nu$ mit $\nu > \nu_{\sigma'}$ gibt es ein kleinstes Glied $\gamma_{\nu_{\sigma'+1}} = \gamma_{\nu_\sigma}$ mit dem kleinstmöglichen Index $\nu_\sigma$. Ist $\sigma$ Limeszahl und $\lambda = \lim_{\tau < \sigma} \nu_\tau < \varrho$, so gibt es in der Restfolge der $\gamma_\nu$ mit $\nu \geqq \lambda$ wieder ein kleinstes Glied $\gamma_{\nu_\sigma}$ mit dem kleinstmöglichen Index $\nu_\sigma \geqq \lambda$. — Die so zu definierende Teilfolge $(\gamma_{\nu_\tau})$ kann nicht abnehmen und $(\gamma_\nu)$ muß mit ihr konfinal sein.

Um den Hilfssatz 1 für den Beweis von Satz 6 zu verwenden, setzen wir $\lambda^{(\nu)} = (\alpha_1^{(\nu)}, \ldots, \alpha_s^{(\nu)})$ und $l^{(\nu)} = (\alpha_1^{(\nu)}, \ldots, \alpha_p^{(\nu)})$. Die $l^{(\nu)}$ sind hinsichtlich der Relation $\prec$ wohlgeordnet, so daß wir sie mit den $\gamma_\nu$ des Hilfssatzes identifizieren können. Wir haben zu zeigen, daß für eine Limeszahl $\mu < \Gamma_s$ stets $\lambda^{(\mu)} = \lim_{\nu < \mu} \lambda^{(\nu)}$ ist. Nach Hilfssatz 1 ist $(l^{(\nu)})$, $\nu < \mu$, mit einer Teilfolge $l^{(\nu_\tau)}$, $\tau < \mu' \leqq \mu$, konfinal, welche im Sinne $\prec$ nicht abnimmt. Es ist natürlich $\tilde{\lambda} = \lim_{\nu < \mu} \lambda^{(\nu)} = \lim_{\tau < \mu'} \lambda^{(\nu_\tau)} \leqq \lambda^{(\mu)} < \Gamma_s$. Also wird nach Satz 1: $\tilde{\lambda} = (\beta_1, \ldots, \beta_s)$. Wäre $(\beta_1, \ldots, \beta_p) \prec l^{(\nu_\tau)}$ für ein $\tau = \tau_0 < \mu'$, so wäre dies für alle $\tau > \tau_0$, $\tau < \mu'$, erst recht der Fall. Also hätten wir $\tilde{\lambda} \prec \lambda^{(\nu_\tau)}$ für $\tau_0 \leq \tau < \mu'$ und daher gemäß $(G_c' 4)$ für alle diese $\tau$: $\max(\beta_1, \ldots, \beta_s) \geqq \lambda^{(\nu_\tau)}$, d.h. $\max(\beta_1, \ldots, \beta_s) \geqq \tilde{\lambda}$, ein Widerspruch. Also ist $(\beta_1, \ldots, \beta_p) \geqq l^{(\nu_\tau)} > (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$, d.h. $\tilde{\lambda} > (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$. Mithin muß $\tilde{\lambda} = \lambda^{(\mu)}$ sein.

3. W. Ackermann hat den verschiedenen Typen von Limeszahlen $\in \mathfrak{A}_3$ Fundamentalfolgen zugeordnet ([A], S. 411). Es ist an sich ohne weiteres möglich, seine dortige Tabelle für beliebige $\mathfrak{A}_s$ zu verallgemeinern. Da wir jedoch für spätere Zwecke einige Fundamentalfolgen in etwas anderer Form benötigen, ziehen wir es vor, auf direktem Wege, unter der Voraussetzung $s \geqq 2$, eine Tabelle für die Fundamentalfolgen herzuleiten. — Der Fall $s = 1$ lohnt keine gesonderte Behandlung; $\mathfrak{A}_1$ stellt nämlich nur eine geringfügige Modifikation der Cantorschen Bezeichnungsweise für die Zahlen unterhalb der kleinsten $\varepsilon$-Zahl $\varepsilon_0 = \Gamma_1$ dar, denn es gilt $(\alpha) = \omega^\alpha$ für $\alpha < \Gamma_1$, wie man ohne weiteres sieht.

Zunächst betrachten wir die Zahlen $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) \in \mathfrak{A}_s$, wobei wir von nun an unter $\lambda$ und $\mu$ stets Limeszahlen verstehen. Wir sagen, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ sei vom Typ $c_p$ oder $b_p$ oder $a_p$ $(1 \leqq p \leqq s)$, je nachdem $\alpha_p = \lambda$ oder $= \eta + 1$ oder

$=1$ ist. Einerseits brauchen wir nun nicht alle $3^s$ Typen von Zahlen $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ gesondert zu behandeln, die sich durch Zusammenstellung von $s$ Typenzeichen $t_1, \ldots, t_s$ mit $t_p = c_p$ oder $= b_p$ oder $= a_p$ ergeben; über die Definition der Fundamentalfolge entscheidet nämlich entweder die Kenntnis von $t_s$ allein oder die Kenntnis von $t_s$ und demjenigen $t_p$, dessen Index $p < s$ dadurch charakterisiert ist, daß $\alpha_{p+1} = \cdots = \alpha_{s-1} = 1$ und entweder $p = 1$ oder $p > 1$ mit $\alpha_p \neq 1$ ist. Andererseits sind unter Umständen noch zusätzliche Kennzeichnungen außer der Angabe von $t_s$ und $t_p$ erforderlich. — In der folgenden Tabelle bedeutet $\lambda_n$ bzw. $\mu_n$ die als bekannt angesehene Fundamentalfolge für $\lambda$ bzw. $\mu$.

$(c_p\, c_s)$ $\left\{ \begin{array}{c} (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \mu, 1, \ldots, 1, \lambda)_s = \lim\limits_n (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \mu_n, 1, \ldots, 1, \lambda)_s, \\ 1 \leqq p \leqq s-1, \quad \lambda > (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \mu, 1, \ldots, 1)_{s-1}. \end{array} \right.$

$(b_p\, c_s)$ $\left\{ \begin{array}{c} (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \eta+1, 1, \ldots, 1, \lambda)_s = \lim\limits_n \sigma_n, \\ \sigma_{n+1} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \eta, \sigma_n, 1, \ldots, 1)_s, \quad \sigma_1 = \lambda, \quad 1 \leqq p \leqq s-1, \\ \lambda > (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \eta+1, 1, \ldots, 1)_{s-1}. \end{array} \right.$

$(a_1\, c_s)$ $\quad (1, \ldots, 1, \lambda)_s = \lambda \cdot \omega = \lim\limits_n \lambda \cdot n, \quad \lambda > (1, \ldots, 1)_{s-1}.$

$(c_s)$ $\quad (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}, \lambda) = \lim\limits_n (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}, \lambda_n), \quad \lambda \sim > (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}).$

$(c_p\, b_s)$ $\left\{ \begin{array}{c} (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \lambda, 1, \ldots, 1, \eta+1)_s = \lim\limits_n (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \lambda_n, 1, \ldots, 1, \lambda')_s, \\ \lambda' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \lambda, 1, \ldots, 1, \eta)_s, \quad 1 \leqq p \leqq s-1. \end{array} \right.$

$(b_p\, b_s)$ $\left\{ \begin{array}{c} (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \zeta+1, 1, \ldots, 1, \eta+1)_s = \lim\limits_n \sigma_n, \\ \sigma_{n+1} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \zeta, \sigma_n, 1, \ldots, 1)_s, \\ \sigma_1 = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \zeta+1, 1, \ldots, 1, \eta)_s, \quad 1 \leqq p \leqq s-1. \end{array} \right.$

$(a_1\, b_s)$ $\quad (1, \ldots, 1, \eta+1)_s = (1, \ldots, 1, \eta)_s \cdot \omega = \lim\limits_n (1, \ldots, 1, \eta)_s \cdot n.$

$(c_p\, a_s)$ $\left\{ \begin{array}{c} (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \lambda, 1, \ldots, 1)_s = \lim\limits_n (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \lambda_n, 1, \ldots, 1, \lambda)_s, \\ 1 \leqq p \leqq s-1. \end{array} \right.$

$(c'_p\, a_s)$ $\left\{ \begin{array}{c} (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \lambda, 1, \ldots, 1)_s = \lim\limits_n (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \lambda_n, 1, \ldots, 1)_s, \\ 1 \leqq p \leqq s-1, \quad \lambda \sim > (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}) \quad \text{für} \quad p > 1. \end{array} \right.$

$(b_p\, a_s)$ $\left\{ \begin{array}{c} (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \eta+1, 1, \ldots, 1)_s = \lim\limits_n \sigma_n, \ \sigma_{n+1} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \eta, \sigma_n, 1, \ldots, 1)_s, \\ \sigma_1 = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \eta, 1, \ldots, 1)_s, \quad 1 \leqq p \leqq s-1. \end{array} \right.$

$(a_1\, a_s)$ $\quad (1, \ldots, 1)_s = \omega = \lim n.$

Für Limeszahlen der Form $\pi_1 + \cdots + \pi_m$, $m > 1$ genügt die Festsetzung:

$(l_s)$ $\qquad \alpha + \pi = \lim\limits_n (\alpha + \gamma_n), \qquad \pi = (\beta_1, \ldots, \beta_s) = \lim\limits_n \gamma_n.$

Die Definitionen $(l_s)$ und $(a_1\, a_s)$ sind selbstverständlich. Die übrigen wollen wir kurz begründen. Ihre linken Seiten bezeichnen wir mit $\tilde{\lambda}$, ihre rechten mit $\lim\limits_n \sigma_n$. Man überzeugt sich leicht, daß in $(c_p\, c_s)$ bis $(b_p\, a_s)$ immer $\tilde{\lambda} > \sigma_n$

gilt. Nach Satz 1 und 2 ist daher stets $\lim_n \sigma_n = \varrho = (\xi_1, \ldots, \xi_s) \leqq \tilde{\lambda}$, welche Bezeichnung wir ebenfalls festhalten.

Zu $(c_p\ c_s)$: $(\xi_1, \ldots, \xi_p) < (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \mu)$ ist nicht möglich, denn zusammen mit $\varrho > \sigma_n$ ergäbe dies $\max(\xi_1, \ldots, \xi_s) \geqq \varrho$; $(\xi_1, \ldots, \xi_p) > (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \mu)$ und somit $\tilde{\lambda} > \varrho$ steht im Widerspruch zu der Relation $\varrho > \max(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \mu, \lambda)$, die aus $\varrho > \sigma_n$ und $\lambda > \mu$ folgt. Also ist $\varrho = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \mu, \xi_{p+1}, \ldots, \xi_s)$. Aus $\varrho \leqq \tilde{\lambda}$ folgt $\varrho < \tilde{\lambda}$, also $(\xi_{p+1}, \ldots, \xi_s) = (1, \ldots, 1, \xi_s)_{s-p}$ mit $\xi_s \leqq \lambda$. Wäre $\xi_s < \lambda$, so folgte vermöge Satz 3, daß $\lambda > \varrho$ wäre. Also ist $\xi_s = \lambda$.

Zu $(b_p\ c_s)$: Aus $(\xi_1, \ldots, \xi_p) \leqq (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \eta)$ folgte wegen $\xi_{p+1} < \sigma_n$ für hinreichend großes $n$: $(\xi_1, \ldots, \xi_{p+1}) < (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \eta, \sigma_n)$, und hieraus ergäbe sich $\max(\xi_1, \ldots, \xi_s) \geqq \varrho$. — $(\xi_1, \ldots, \xi_p) > (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \eta + 1)$ und somit $\tilde{\lambda} > \varrho$ ist unvereinbar mit $\max(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \eta + 1, \lambda) < \varrho$. — Also ist $\varrho = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \eta + 1, \xi_{p+1}, \ldots, \xi_s)$. Nun wie bei $(c_p\ c_s)$.

Zu $(a_1\ c_s)$: Aus $\lambda < \varrho = (\xi_1, \ldots, \xi_s) \leqq (1, \ldots, 1, \lambda)_s$ folgt $\xi_1 = \cdots = \xi_{s-1} = 1$, $\xi_s \leqq \lambda$, also wie bei $(c_p\ c_s)$: $\xi_s = \lambda$.

Zu $(c_s)$: $(\xi_1, \ldots, \xi_{s-1}) < (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1})$ würde $\max(\xi_1, \ldots, \xi_s) \geqq \varrho$ liefern, und $(\xi_1, \ldots, \xi_{s-1}) > (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1})$, somit $\tilde{\lambda} > \varrho$, ergäbe $\lambda \geqq \varrho$, d.h. $\lambda > \sigma_n$, also $\lambda > (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}, \nu)$ für $\nu < \lambda$. Nach Satz 3 hätte man daher $\lambda > (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1})$, entgegen der Voraussetzung.

Zu $(c_p\ b_s)$: Aus $(\xi_1, \ldots, \xi_p) < (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \lambda)$ folgte $(\xi_1, \ldots, \xi_p) < (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \lambda_n)$ für hinreichend großes $n$, daher $\max(\xi_1, \ldots, \xi_s) \geqq \varrho$. — $(\xi_1, \ldots, \xi_p) > (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \lambda)$ und damit $\tilde{\lambda} > \varrho$ gerät in Widerspruch zu $\max(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \lambda, \eta + 1) < \lambda' < \varrho$. Also ist $\varrho = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \lambda, \xi_{p+1}, \ldots, \xi_s)$. Aus $\varrho \leqq \tilde{\lambda}$ folgt $\varrho \leqq \tilde{\lambda}$, demnach $(\xi_{p+1}, \ldots, \xi_s) = (1, \ldots, 1, \xi_s)_{s-p}$ mit $\xi_s \leqq \eta + 1$; wegen $\lambda' < \varrho$ muß aber $\xi_s = \eta + 1$ sein.

Zu $(b_p\ b_s)$: Die Unmöglichkeit von $(\xi_1, \ldots, \xi_p) \leqq (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \zeta)$ erkennt man wie bei $(b_p\ c_s)$ und $(\xi_1, \ldots, \xi_p) > (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \zeta + 1)$ läßt sich wie bei $(c_p\ b_s)$ widerlegen. Also $\varrho = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \zeta + 1, \xi_{p+1}, \ldots, \xi_s)$. Nun wie bei $(c_p\ b_s)$.

Zu $(a_1\ b_s)$: Aus $(1, \ldots, 1, \eta)_s < \varrho = (\xi_1, \ldots, \xi_s) \leqq \tilde{\lambda} = (1, \ldots, 1, \eta + 1)_s$ folgt $\varrho \leqq \tilde{\lambda}$ und somit $\varrho = \tilde{\lambda}$.

Zu $(c_p\ a_s)$: $(\xi_1, \ldots, \xi_p) < (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \lambda)$ und $(\xi_1, \ldots, \xi_p) > (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \lambda)$ scheiden aus wie bei $(c_p\ b_s)$. Dann folgt $\varrho = \tilde{\lambda}$ sofort aus $\varrho \leqq \tilde{\lambda}$.

Zu $(c'_p\ a_s)$: Nach Satz 3 gibt es ein $n_0$ mit $\lambda < (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \lambda_{n_0}, 1, \ldots, 1)_s$. Aus den Ungleichungen $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \lambda_n, 1, \ldots, 1)_s < (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \lambda_n, 1, \ldots, 1, \lambda)_s < (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \lambda_{n+1}, 1, \ldots, 1)_s$ für $n + 1 \geqq n_0$ ersieht man, daß die Fundamentalfolge in $(c'_p\ a_s)$ mit der in $(c_p\ a_s)$ äquivalent ist.

Bemerkung. An sich wäre $(c'_p\ a_s)$ überflüssig; aber unter den gebotenen Voraussetzungen ist $(c'_p\ a_s)$ bequemer als $(c_p\ a_s)$.

Zu $(b_p\ a_s)$: Man widerlegt $(\xi_1, \ldots, \xi_p) \leqq (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \eta)$ bzw. $(\xi_1, \ldots, \xi_p) > (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \eta + 1)$ wie bei $(b_p\ c_s)$ bzw. $(b_p\ b_s)$. Nun wie bei $(c_p\ a_s)$.

**4.** Ordnet man jedem Symbol $\alpha \in \mathfrak{A}_s$ dasjenige Symbol $\alpha^*$ zu, welches entsteht, indem man jedes $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) \in \mathfrak{A}_s$ durch $(1, \alpha_1^*, \ldots, \alpha_s^*)$ ersetzt, dann gehören alle $\alpha^*$ zu $\mathfrak{A}_{s+1}$ und aus $\alpha \leqq \beta$ folgt $\alpha^* \leqq \beta^*$ (aus $\alpha = \beta$ folgt natürlich

$\alpha^* = \beta^*$). Um dies zu beweisen, bezeichnen wir mit $N(\alpha)$ die Anzahl der in $\alpha$ auftretenden Zeichen ( ) und + und setzen $N(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) = N(\alpha_1) + N(\alpha_2) + \cdots$. Für $\alpha < \beta$ mit $N(\alpha, \beta) \leq 1$ ist die Behauptung $\alpha^* \in \mathfrak{A}_{s+1}$, $\beta^* \in \mathfrak{A}_{s+1}$, $\alpha^* < \beta^*$ offenbar richtig. Angenommen, sie sei bewiesen für $\alpha < \beta$ mit $N(\alpha, \beta) \leq n-1$. Sei nun $\alpha < \beta$, $N(\alpha, \beta) = n$. Wenn $\alpha = \pi_1 + \cdots + \pi_m$, $m > 1$, so gilt $\pi_i \geq \pi_{i+1}$, $N(\pi_i, \pi_{i+1}) \leq n-1$; also gehören $\pi_i^*$ und $\pi_{i+1}^*$ zu $\mathfrak{A}_{s+1}$ und es gilt $\pi_i^* \geq \pi_{i+1}^*$. Daraus folgt $\alpha^* \in \mathfrak{A}_{s+1}$. Wenn $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$, so ist $N(1, \alpha_i) = N(\alpha_i) \leq n-1$ und daher $\alpha_i^* \in \mathfrak{A}_{s+1}$, folglich wieder $\alpha^* \in \mathfrak{A}_{s+1}$. Ebenso ergibt sich $\beta^* \in \mathfrak{A}_{s+1}$. — Die Relation $\alpha < \beta$ muß auf Grund eines der Fälle $(G_s)$ stattfinden und dabei entweder auf endlich viele Relationen $\alpha_i < \beta_i$ mit $N(\alpha_i, \beta_i) < N(\alpha, \beta)$ zurückgeführt erscheinen [wie in $(G_s 4)$ und eventuell in $(G_s 2)$] oder unmittelbar ersichtlich sein [wie in $(G_s 1)$, $(G_s 3)$ und eventuell in $(G_s 2)$]. Wenn das erstere zutrifft, gilt wegen $N(\alpha_i, \beta_i) \leq n-1$ auch $\alpha_i^* < \beta_i^*$ und damit $\alpha^* < \beta^*$, während beim Eintreten der zweiten Möglichkeit die Relation $\alpha^* < \beta^*$ in derselben Weise evident ist wie $\alpha < \beta$. — Übrigens ist $N(\alpha) = N(\alpha^*)$.

Sei $\mathfrak{A}_s^*$ das System der $\alpha^*$, $\alpha \in \mathfrak{A}_s$. Die wohlgeordneten Systeme $\mathfrak{A}_s^*$ und $\mathfrak{A}_s$ sind vom selben Typus; wir können sie daher miteinander identifizieren, d.h. $\alpha = \alpha^*$ setzen. Nach $(b_1 a_{s+1})$ ist $(2, 1, \ldots, 1)_{s+1} = \lim_n \sigma_n^*$, wo $\sigma_n$ aus (14) entnommen ist. Also kommt

$$\Gamma_s = (2, 1, \ldots, 1)_{s+1} \qquad (s \geq 1). \tag{16}$$

Ausführlicher formuliert:

Satz 7. $\mathfrak{A}_s = \mathfrak{A}_s^*$ *ist der durch* $(2, 1, \ldots, 1)_{s+1}$ *bestimmte Abschnitt von* $\mathfrak{A}_{s+1}$ (*für* $s \geq 1$).

Ohne Verwendung von (14) läßt sich der Satz 7 etwa so beweisen, daß man $\alpha^* < (2, 1, \ldots, 1)_{s-1} = \lim_n \sigma_n^*$ (s. oben) für $\alpha^* \in \mathfrak{A}_s^*$ zeigt. Die vorstehende Ungleichung ist nämlich richtig für $N(\alpha^*) = 1$. Ist sie bewiesen für $N(\beta^*) \leq n-1$ und ist $N(\alpha^*) = n$, so wird im Fall $\alpha^* = \pi_1^* + \cdots + \pi_m^*$ $(m > 1)$ wegen $N(\pi_1^*) < n$ die Relation $\pi_1^* < (2, 1, \ldots, 1)_{s-1}$ und daher $\alpha^* < (2, 1, \ldots, 1)_{s-1}$ gelten, und im Fall $\alpha^* = (1, \alpha_1^*, \ldots, \alpha_s^*)$ folgt aus $N(\alpha_i^*) < n$, daß $\alpha_i^* < (2, 1, \ldots, 1)_{s-1}$ für $i = 1, \ldots, s$ und daher wegen $\alpha^* < (2, 1, \ldots, 1)_{s+1}$ wiederum $\alpha^* < (2, 1, \ldots, 1)_{s+1}$ sein muß.

## §11. Ähnlichkeit von $\mathfrak{A}_s$ und $[1, 1VII'^{s-1})$.

**1.** Wir wollen nun zeigen, daß $\mathfrak{A}_s$ als wohlgeordnete Menge dem Abschnitt $[1, 1VII'^{s-1})$ des konstruktiven Algorithmus ähnlich ist. Zu dem Zweck bedienen wir uns unter anderem der Rechenregeln des freien Algorithmus, die in **II** und **III** entwickelt sind, was wir unbedenklich tun können, weil die Zahlenfiguren des konstruktiven Algorithmus wirklich „Ordnungszahlen" sind. Dabei benützen wir die Abkürzungen

$$J_\nu = II'^\nu, \qquad J_0 = I \quad (\text{also } J_\nu I' = J_{\nu+1}), \tag{17}$$

indem die letztere Festsetzung im Einklang mit der im freien Algorithmus eingeführten Regel steht, daß ein Operator, der einen Exponenten 0 hat, einfach wegzulassen ist (**II**, (1), $(2_n)$). Dann gilt:

$$(\alpha W J_\nu^\tau) W J_\nu^{\tau+1} = \alpha W J_\nu^{\tau+1}, \quad \tau \geq 0, \ \nu \geq 0, \ W \text{ ein Operator erster Stufe.} \tag{18}$$

Man hat nämlich für einen beliebigen Operator $V$ von erster Stufe:

$$(\alpha V)^{\nu} I I'^{\nu} = \alpha^{\nu} V^{\nu} I I'^{\nu}, \qquad \nu \geq 0,$$

welche Formel sich für $\nu \geq 1$ aus III, § 7, Satz 4 und dem fünften daran anschließenden Absatz, für $\nu = 0$ aber aus II, § 6, (22) ergibt. Ersetzt man in ihr $V$ durch $W J_{\nu}^{\tau}$, so kommt (18) wegen $W J_{\nu}^{\tau-1} = (W J_{\nu}^{\tau}) J_{\nu}^{1}$.

Außerdem setzen wir

$$-1 + \dot{\alpha} = \dot{\alpha} \quad \text{für} \quad \alpha \geq 1. \tag{19}$$

Unsere Behauptung beweisen wir allgemein für $s \geq 3$; für $s = 2$ und $s = 1$ ergibt sie sich dann vermöge Satz 7. Der Beweis besteht in der Herleitung der folgenden Relationen (worin $V$ durch $\alpha V = \alpha \cdot \omega$ erklärt ist):

$$(C_p^s) \quad \begin{cases} (\alpha_1, \ldots, \alpha_p, 1, \ldots, 1, \lambda)_s = \lambda\big(\ldots((V J_{s-2}^{\dot{\lambda}_1}) J_{s-2}^{\dot{\alpha}_2}) \ldots\big) J_{s-p}^{\dot{\alpha}_p}{}_{-1}, \\ \qquad 1 \leq p \leq s-1, \ \lambda > (\alpha_1, \ldots, \alpha_p, 1, \ldots, 1)_{s-1}. \end{cases}$$

$$(B_p^s) \quad \begin{cases} (\alpha_1, \ldots, \alpha_p, 1, \ldots, 1, \eta+1)_s = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p, 1, \ldots, 1, \eta)_s \big(\ldots (V J_{s-2}^{\dot{\alpha}_1}) \ldots\big) J_{s}^{\dot{\alpha}_p}{}_{p-1}, \\ \qquad 1 \leq p \leq s-1. \end{cases}$$

$$(\overline{C}_p^s) \quad \begin{cases} (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \lambda, 1, \ldots, 1)_s = \lambda\big((\ldots (V J_{s-2}^{\dot{\alpha}_1}) \ldots) J_{s-p}^{\dot{\alpha}_{p-1}}\big) J_{s-p-1}^{\lambda}, \\ \qquad 2 \leq p \leq s-1, \quad \lambda > (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}). \end{cases}$$

$$(\overline{B}_p^s) \quad \begin{cases} (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \eta+1, 1, \ldots, 1)_s \\ = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \eta, 1, \ldots, 1)_s \big((\ldots (V J_{s-2}^{\dot{\alpha}_1}) \ldots) J_{s-p}^{\dot{\alpha}_{p-1}}\big) J_{s-p-1}^{\dot{\eta}+1}, \ 2 \leq p \leq s-1. \end{cases}$$

$$(A_p^s) \quad \begin{cases} (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}, 1) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p, 1, \ldots, 1)_s = 1\big(\ldots (V J_{s-2}^{\dot{\alpha}_1}) \ldots\big) J_{s-p-1}^{\dot{\alpha}_p}, \\ 1 \leq p \leq s-1, \ \alpha_2 < (\alpha_1+1, 1, \ldots, 1)_s, \ldots, \alpha_{s-1} < (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-3}, \alpha_{s-2}+1, 1, 1). \end{cases}$$

Man bemerkt, daß $(C_p^s)$, $(B_p^s)$, $(A_p^s)$ für $p < s-1$ als Spezialfälle von $(C_{s-1}^s)$, $(B_{s-1}^s)$, $(A_{s-1}^s)$ angesehen werden können. Aber da wir die vorstehenden Relationen durch Induktion nach $p$ beweisen werden, eignet sich die gewählte Bezeichnungsweise besser zum Zitieren. — Wir können sogleich die Aussage notieren:

Hilfssatz 2. *Sei* $(C_p^s)$ *richtig für ein* $(p-1)$*-tupel* $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}$ *und beliebiges* $\alpha_p \in \mathfrak{A}_s$. *Dann ist* $(\overline{C}_p^s)$ *richtig für das* $(p-1)$*-tupel* $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}$.

Beweis. Sei $\lambda > (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1})$. — Nach $(c_p\, a_s)$ wird

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \lambda, 1, \ldots, 1)_s = \lim_n (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \lambda_n, 1, \ldots, 1, \lambda)_s.$$

Auf den Ausdruck hinter lim ist aber $(C_p^s)$ anwendbar, denn aus $\lambda > (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1})$ folgt $\lambda > (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \lambda_n, 1, \ldots, 1)_{s-1}$. Somit wird der obige Limes gleich $\lim_n \lambda\big(\ldots (V J_{s-2}^{\dot{\alpha}_1}) \ldots\big) J_{s-p-1}^{\dot{\lambda}_n} = \lambda\big(\ldots (V J_{s-2}^{\dot{\alpha}_1}) \ldots\big) J_{s-p-1}^{\lambda}$.

**2.** Um mit dem Beweis unserer Relationen $(C_p^s)$ bis $(A_p^s)$ zu beginnen, nehmen wir zunächst an, $(C_{s-2}^s)$ und $(B_{s\ 2}^s)$ seien richtig für ein bestimmtes $(s-2)$-tupel $\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-2}$ und $(C_{s-1}^s)$ sowie $(B_{s-1}^s)$ seien daraufhin bewiesen

für dieses $(s-2)$-tupel und alle $\alpha_{s-1} < \alpha'_{s-1} \in \mathfrak{N}_s$; die letztere Hypothese trifft zu für $\alpha'_{s-1} = 2$. Wir zeigen, daß stets $\alpha'_{s-1}$ durch $\alpha'_{s-1}+1$ ersetzt werden darf.

1. Fall. $\alpha'_{s-1} = \mu =$ Limeszahl. Für $\lambda > (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-2}, \mu)$ liefert $(c_{s-1}\, c_s)$: $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-2}, \mu, \lambda) = \lim_n (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-2}, \mu_n, \lambda)$, und das ist nach Induktionsvoraussetzung $= \lim_n \lambda\big((\ldots(V J_{s-2}^{\dot\alpha_1})\ldots) J_1^{\dot\mu_{s-2}}\big) J_0^{\dot\mu_n} = \lambda\big(\ldots(V J_{s-2}^{\dot\alpha_1})\ldots\big) J_0^{\mu}$, d. h. $(C_{s-1}^s)$ gilt auch für $\alpha_{s-1} = \mu$.

Nach $(c_{s-1}\, b_s)$ wird $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-2}, \mu, \eta+1) = \lim_n (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-2}, \mu_n, \mu')$, wo $\mu' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-2}, \mu, \eta) > (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-2}, \mu_n)$. Der Limes ist also auf Grund der Induktionsannahme $= \lim_n \mu'\big(\ldots(V J_{s-2}^{\dot\alpha_1})\ldots\big) J_0^{\dot\mu_n} = \mu'\big(\ldots(V J_{s-2}^{\dot\alpha_1})\ldots\big) J_0^{\mu}$, d. h. $(B_{s-1}^s)$ stimmt auch für $\alpha_{s-1} = \mu$.

2. Fall. $\alpha'_{s-1} = \beta+1$. Für $\lambda > (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-2}, \beta+1)$ liefert $(b_{s-1}\, c_s)$: $\tilde\lambda = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-2}, \beta+1, \lambda) = \lim_n \sigma_n$, $\sigma_{n+1} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-2}, \beta, \sigma_n)$, $\sigma_1 = \lambda$. Um nun weiterzukommen, beweisen wir zunächst die Formel:

$$(20)\quad (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-2}, \beta, \lambda+\nu) = \lambda\big(\big(\ldots(V J_{s-2}^{\dot\alpha_1})\ldots\big) J_1^{\dot\alpha_{s-2}}\big) J_0^{\dot\beta}\big)^{1+\nu} \quad \text{für} \quad 0 \leq \nu < \tilde\lambda.$$

Für $\nu = 0$ ist (20) richtig nach Induktionsvoraussetzung. Sei (20) richtig für $\nu < \gamma < \tilde\lambda$. Ist $\gamma = \delta+1$, so folgt aus $(B_{s-1}^s)$ nach Annahme: $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-2}, \beta, \lambda+\delta+1) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-2}; \beta, \lambda+\delta)\big(\ldots(V J_{s-2}^{\dot\alpha_1})\ldots\big) J_0^{\dot\beta} = \lambda\big(\big(\ldots(V J_{s-2}^{\dot\alpha_1})\ldots\big) J_0^{\dot\beta}\big)^{1+\delta+1}$. — Ist $\gamma$ Limeszahl, so liefert $(c_s)$ mit Rücksicht auf Satz 5 und Satz 2: $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-2}, \beta, \lambda+\gamma) = \lim_n (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-2}, \beta, \lambda+\gamma_n) = \lim_n \lambda\big(\big(\ldots(V J_{s-2}^{\dot\alpha_1})\ldots\big) J_0^{\dot\beta}\big)^{1+\gamma_n}$ $= \lambda\big(\big(\ldots(V J_{s-2}^{\dot\alpha_1})\ldots\big) J_0^{\dot\beta}\big)^{1+\gamma}$. Damit ist (20) bewiesen.

Nun ergibt sich aus (20): $\sigma_2 = \lambda\big(\ldots(V J_{s-2}^{\dot\alpha_1})\ldots\big) J_0^{\dot\beta}$, und wegen $\lambda + \sigma_n = \sigma_n$ für $n \geq 2$: $\sigma_{n+1} = \lambda\big(\big(\ldots(V J_{s-2}^{\dot\alpha_1})\ldots\big) J_0^{\dot\beta}\big)^{\sigma_n}$. Daher wird $\tilde\lambda = \lim_n \sigma_{n+1} = \lambda\big(\big(\ldots(V J_{s-2}^{\dot\alpha_1})\ldots\big) J_0^{\dot\beta}\big) I = \lambda\big(\ldots(V J_{s-2}^{\dot\alpha_1})\ldots\big) J_0^{\dot\beta \cdot 1}$, womit $(C_{s-1}^s)$ auch für $\alpha_{s-1} = \beta+1$ bestätigt ist.

Weiterhin wird vermöge $(b_{s-1}\, b_s)$:

$$\tilde\lambda = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-2}, \beta+1, \eta+1) = \lim_n \sigma_n,\ \sigma_{n+1} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-2}, \beta, \sigma_n),$$
$$\sigma_1 = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-2}, \beta+1, \eta) > (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-2}, \beta).$$

Nach Satz 5 gilt daher (20) mit $\lambda = \sigma_1$. Mit diesem Wert für $\lambda$ schließt man nun wörtlich weiter wie im vorhergehenden Absatz und beweist die Richtigkeit von $(B_{s-1}^s)$ auch für $\alpha_{s-1} = \beta+1$.

Nach dem Prinzip der transfiniten Induktion haben wir also daraus, daß $(C_{s-2}^s)$ und $(B_{s-2}^s)$ für ein bestimmtes $(s-2)$-tupel $\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-2}$ als richtig gelten, gefolgert, daß $(C_{s-1}^s)$ und $(B_{s-1}^s)$ richtig sind für dieses $(s-2)$-tupel und alle $\alpha_{s-1} \in \mathfrak{N}_s$. Nach Hilfssatz 2 trifft daher auch $(\overline{C}_{s-1}^s)$ zu für das $(s-2)$-tupel $\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-2}$; wir zeigen, daß dies auch von $(\overline{B}_{s-1}^s)$ ausgesagt werden kann. — Nach $(b_{s-1}\, a_s)$ wird

$$\tilde\lambda = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-2}, \eta+1, 1) = \lim_n \sigma_n, \qquad \sigma_{n+1} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-2}, \eta, \sigma_n),$$
$$\sigma_1 = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-2}, \eta, 1).$$

Gemäß Satz 4 ist $\tilde{\lambda}$ die kleinste Zahl, welche $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-2}, \eta)$ ist. Analog wie (20) beweist man daher die Formel

$$(21) \qquad (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-2}, \eta, \nu) = \sigma_1\big((\ldots(V J_{s-2}^{\dot{\alpha}_1})\ldots) J_0^{\dot{\eta}}\big)^{\dot{\nu}}, \qquad 1 \leqq \nu < \tilde{\lambda}.$$

Vermöge (21) wird $\sigma_{n+1} = \sigma_1\big((\ldots(V J_s^{\dot{\alpha}_1})_2)\ldots\big) J_0^{\dot{\eta}}\big)^{\sigma_n}$ für $n \geqq 1$ und daraus folgt $\tilde{\lambda} = \sigma_1\big(\ldots(V J_{s-2}^{\dot{\alpha}_1})\ldots\big) J_0^{\dot{\eta}+1}$, also $(\overline{\mathrm{B}}_{s-1}^s)$.

**3.** Jetzt nehmen wir an, es sei für ein $p \leqq s-2$ bewiesen, daß aus der Richtigkeit von $(\mathrm{C}_p^s)$ und $(\mathrm{B}_p^s)$ für ein $p$-tupel $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ die Richtigkeit von $(\mathrm{C}_{p+1}^s)$ und $(\mathrm{B}_{p+1}^s)$ für dieses $p$-tupel und beliebiges $\alpha_{p+1} \in \mathfrak{N}_s$ sowie die Richtigkeit von $(\overline{\mathrm{C}}_{p-1}^s)$ und $(\overline{\mathrm{B}}_{p-1}^s)$ für das genannte $p$-tupel folgt. Wir kommen soeben von dem Nachweis, daß diese Annahme für $p = s-2$ zutreffend ist. Außerdem setzen wir voraus, daß $(\mathrm{C}_{p-1}^s)$ und $(\mathrm{B}_{p-1}^s)$ für ein $(p-1)$-tupel $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}$ richtig sind, was für $p = 1$ gar keine Voraussetzung bedeutet. Wir zeigen, daß dann $(\mathrm{C}_p^s)$ und $(\mathrm{B}_p^s)$ für das gegebene $(p-1)$-tupel $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}$ und alle $\alpha_p \in \mathfrak{N}_s$ gelten und daß im Fall $p \geqq 2$, also $s \geqq 4$, auch $(\overline{\mathrm{C}}_p^s)$ und $(\overline{\mathrm{B}}_p^s)$ für das genannte $(p-1)$-tupel stimmen. Damit wird der Induktionsbeweis für die Relationen $(\mathrm{C}_p^s)$ bis $(\overline{\mathrm{B}}_p^s)$ beendet sein.

Zunächst folgt aus der Induktionsvoraussetzung, daß $(\mathrm{C}_p^s)$ und $(\mathrm{B}_p^s)$ richtig sind für das $p$-tupel $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, 1$[11]). Seien $(\mathrm{C}_p^s)$ und $(\mathrm{B}_p^s)$ richtig für alle $p$-tupel $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \alpha_p$ mit $\alpha_p < \alpha_p' \in \mathfrak{N}_s$; wir zeigen die Richtigkeit für $\alpha_p = \alpha_p'$.

1. Fall. $\alpha_p' = \mu =$ Limeszahl. Der Beweis verläuft analog wie in **2**.

2. Fall. $\alpha_p' = \beta + 1$. Für $\lambda > (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \beta+1, 1, \ldots, 1)_{s-1}$ liefert $(\mathrm{b}_p\, \mathrm{c}_s)$:

$$\tilde{\lambda} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \beta+1, 1, \ldots, 1, \lambda)_s = \lim_n \sigma_n,$$

$$\sigma_{n+1} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \beta, \sigma_n, 1, \ldots, 1)_s, \qquad \sigma_1 = \lambda.$$

Nun müssen wir ähnlich wie in **2** eine Formel zu Hilfe nehmen:

$$(22) \quad \begin{cases} (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \beta, \lambda+\nu, 1, \ldots, 1)_s = \lambda\big(((\ldots(V J_s^{\dot{\alpha}_1})_2)\ldots) J_{s-p}^{\dot{\alpha}_{p-1}}) J_{s-p-1}^{\dot{\beta}}\big) J_{s-p-2}^{\lambda+\nu}, \\ 0 \leqq \nu < \tilde{\lambda}. \end{cases}$$

Für $\nu = 0$ ist (22) richtig nach der Induktionsvoraussetzung hinsichtlich $(\overline{\mathrm{C}}_{p+1}^s)$. Sei (22) richtig für alle $\nu < \gamma < \tilde{\lambda}$. Wenn $\gamma = \delta + 1$, so ergibt sich aus $(\overline{\mathrm{B}}_{p+1}^s)$ und (18):

$$\begin{aligned}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \beta, \lambda+\delta+1, 1, \ldots, 1)_s &= (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \beta, \lambda+\delta, 1, \ldots, 1)_s\big(\ldots(V J_{s-2}^{\dot{\alpha}_1})\ldots\big) J_{s-p-2}^{\lambda+\delta+1} \\ &= \lambda\big(\ldots(V J_{s-2}^{\dot{\alpha}_1})\ldots\big) J_{s-p-2}^{\lambda+\delta+1}.\end{aligned}$$

Wenn $\gamma$ Limeszahl, so findet man mittels der wegen Satz 5 hier anwendbaren Relation $(\mathrm{c}_{p+1}'\, \mathrm{a}_s)$:

$$\begin{aligned}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \beta, \lambda+\gamma, 1, \ldots, 1)_s &= \lim_n (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \beta, \lambda+\gamma_n, 1, \ldots, 1)_s \\ &= \lim_n \lambda\big(\ldots(V J_{s-2}^{\dot{\alpha}_1})\ldots\big) J_{s-p-2}^{\lambda+\gamma_n} = \lambda\big(\ldots(V J_{s-2}^{\dot{\alpha}_1})\ldots\big) J_{s-p-2}^{\lambda+\gamma}.\end{aligned}$$

[11]) Im Fall $p = 1$ beachte man $(\mathrm{a}_1\, \mathrm{c}_s)$ und $(\mathrm{a}_1\, \mathrm{b}_s)$!

Damit ist (22) bewiesen. — Wegen $\lambda+\sigma_n=\sigma_n$ für $n>1$ wird auf Grund von (22): $\sigma_{n+1}=\lambda(\ldots(VJ_{s-2}^{\dot\alpha_1})\ldots)J_{s-p-2}^{\sigma_n}$ für $n\geqq 1$ $(\sigma_1=\lambda)$. Mit Rücksicht auf III, § 7, **5**, (19) wird daher bei Beachtung von (17):

$$\tilde\lambda=\lim_n\sigma_{n+1}=\lambda\left(\ldots(VJ_{s-2}^{\dot\alpha_1})\ldots\right)J_{s-p-1}^{\dot\beta}J_{s-p-2}I'=\lambda\left(\ldots(VJ_{s-2}^{\dot\alpha_1})\ldots\right)J_{s-p-1}^{\dot\beta+1},$$

womit $(C_p^s)$ auch für $\alpha_p=\beta+1$ bestätigt ist.

Nun zeigen wir dasselbe hinsichtlich $(B_p^s)$. Nach $(b_p\,b_s)$ wird

$$\tilde\lambda=(\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-1},\beta+1,1,\ldots,1,\eta+1)_s=\lim_n\sigma_n,$$
$$\sigma_{n+1}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-1},\beta,\sigma_n,1,\ldots,1)_s,$$
$$\sigma_1=(\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-1},\beta+1,1,\ldots,1,\eta)_s>(\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-1},\beta).$$

Wegen Satz 5 gilt also (22) mit $\lambda=\sigma_1$; das weitere verläuft genau wie im vorhergehenden Absatz.

Damit sind $(C_p^s)$ und $(B_p^s)$ sowie nach Induktionsannahme auch $(\overline{C}_{p+1}^s)$ und $(\overline{B}_{p+1}^s)$ bestätigt für das gegebene $(p-1)$-tupel $\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-1}$ und beliebiges $\alpha_p\in\mathfrak{A}_s$. Zu beweisen ist im Fall $p\geqq 2$, $s\geqq 4$ noch $(\overline{B}_p^s)$ für das genannte $(p-1)$-tupel [die Richtigkeit von $(\overline{C}_p^s)$ ist ja durch den Hilfssatz 2 garantiert]. — Vermöge $(b_p\,a_s)$ gilt

$$\tilde\lambda=(\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-1},\eta+1,1,\ldots,1)_s=\lim_n\sigma_n,\quad \sigma_{n+1}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-1},\eta,\sigma_n,1,\ldots,1)_s,$$
$$\sigma_1=(\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-1},\eta,1,\ldots,1)_s.$$

Nach Satz 4 ist $\tilde\lambda$ die kleinste Zahl $>(\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-1},\eta)$, woraus sich die Formel ergibt[12]:

$$(23)\quad\begin{cases}(\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-1},\eta,\nu,1,\ldots,1)_s=\sigma_1\left(\left(\left(\ldots(VJ_{s-2}^{\dot\alpha_1})\ldots\right)J_{s-p}^{\dot\alpha_{p-1}}\right)J_{s-p-1}^{\dot\eta}\right)J_{s-p-2}^{\dot\nu},\\ 2\leqq\nu<\tilde\lambda;\qquad 2\leqq p\leqq s-2,\qquad s\geqq 4.\end{cases}$$

Denn nach $(\overline{B}_{p+1}^s)$ ist (23) richtig für $\nu=2$, worauf der Beweis ähnlich fortgesetzt wird wie bei (22). — Aus (23) folgt $\sigma_{n+1}=\sigma_1\left(\ldots(VJ_{s-2}^{\dot\alpha_1})\ldots\right)J_{s-p-2}^{\sigma_n}$, also $\tilde\lambda=\lim_n\sigma_{n+1}=\sigma_1\left(\ldots(VJ_{s-2}^{\dot\alpha_1})\ldots\right)J_{s-p-2}I'=\sigma_1\left(\ldots(VJ_{s-2}^{\dot\alpha_1})\ldots\right)J_{s-p-1}^{\dot\eta+1}$.

**4.** Jetzt bleiben noch die Relationen $(A_p^s)$ zu beweisen. $(A_1^s)$ ist nach $(a_1\,a_s)$ richtig für $\alpha_1=1$. Wir nehmen an, $(A_{p-1}^s)$ sei richtig für ein $(p-1)$-tupel $\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-1}$ $(1\leqq p\leqq s-1)$; dann ist $(A_p^s)$ immer richtig für das $p$-tupel $\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-1},1$. Sei $(A_p^s)$ bereits bewiesen für alle $p$-tupel $\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-1}$, $\alpha_p$ mit $\alpha_p<\alpha_p'<(\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-2},\alpha_{p-1}+1,1,\ldots,1)_s$[13]).

1. Fall. $\alpha_p'=\mu=$ Limeszahl. Nach Satz 4 ist $\mu\sim>(\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-1})$ für $p>1$; somit kommt vermöge $(c_p'\,a_s)$:

$$(\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-1},\mu,1,\ldots,1)_s=\lim_n(\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-1},\mu_n,1,\ldots,1)_s$$
$$=\lim_n 1\left(\ldots(VJ_{s-2}^{\dot\alpha_1})\ldots\right)J_{s-p-1}^{\dot\mu_n}=1\left(\ldots(VJ_{s-2}^{\dot\alpha_1})\ldots\right)J_{s-p-1}^{\mu}.$$

[12]) Sie läßt sich ebenso für $p=1$ und $s\geqq 3$ beweisen, sobald die Relationen $(C_p^s)$ bis $(\overline{B}_p^s)$ alle verifiziert sind. Aber man sieht leicht, daß (23) für $p=1$ mit $(A_2^s)$ äquivalent ist.

[13]) Im Fall $p=1$ ist natürlich nur $\alpha_1'\in\mathfrak{A}_s$ zu fordern.

2. Fall. $\alpha'_p = \beta + 1$. Wenn $p > 1$, so wird vermöge $(\overline{\mathrm{B}}^s_p)$ und (18):

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \beta + 1, 1, \ldots, 1)_s$$
$$= (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \beta, 1, \ldots, 1)_s(\ldots(1 J^{\dot\alpha_1}_s 2)\ldots) J^{\dot\beta+1}_{s-p-1} = 1(\ldots(V J^{\dot\alpha_1}_{s-2})\ldots) J^{\dot\beta+1}_{s-p-1}.$$

Damit ist bewiesen, daß für $p \geq 2$ aus der Richtigkeit von $(\mathrm{A}^s_{p-1})$ für das $(p-1)$-tupel $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}$ die Richtigkeit von $(\mathrm{A}^s_p)$ für dieses $(p-1)$-tupel und alle $\alpha_p < (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-2}, \alpha_{p-1}+1, 1, \ldots, 1)_s$ hervorgeht. — Sei nun $p = 1$, $\alpha'_1 = \beta + 1$. Vermöge $(\mathrm{b}_1\, \mathrm{a}_s)$ wird

$$\tilde\lambda = (\beta + 1, 1, \ldots, 1)_s = \lim_n \sigma_n, \quad \sigma_{n+1} = (\beta, \sigma_n, 1, \ldots, 1)_s, \quad \sigma_1 = (\beta, 1, \ldots, 1)_s.$$

Nach der vorhergehenden Bemerkung ist vermöge $(\mathrm{A}^s_2)$: $\sigma_{n+1} = 1(V J^{\dot\beta}_{s-2}) J^{\sigma_n}_{s-3}$, während nach Induktionsannahme $\sigma_1 = 1 V J^{\dot\beta}_{s-2}$ gilt. Daher ergibt sich mit Rücksicht auf **III**, § 7, (19):

$$\tilde\lambda = \lim_n \sigma_{n+1} = 1(V J^{\dot\beta}_{s-2}) J_{s-3} I' = 1 V J^{\dot\beta+1}_{s-2}.$$

Hiermit sind die Relationen $(\mathrm{A}^s_p)$ bewiesen.

Aus (14) und $(\mathrm{A}^s_1)$ findet man jetzt $\Gamma_s = \lim_n 1 V J^{\sigma_n}_{s-2}$, $\sigma_1 = 1V$, $\sigma_{n+1} = 1 V J^{\sigma_n}_{s-2}$, also $\Gamma_s = 1 V J_{s-2} I' = 1 V J_{s-1}$ oder

$$\Gamma_s = 1 V I I'^{s-1}, \tag{24}$$

womit die eingangs dieses Paragraphen ausgesprochene Behauptung zunächst für $s \geq 3$ bestätigt ist. — Aus (16) und $(\mathrm{A}^3_1)$ entnimmt man aber: $\Gamma_2 = (2\,1\,1) = 1 V J_1 = 1 V I I'$, und aus Satz 7 vermöge $(\overline{\mathrm{B}}^3_2)$: $\Gamma_1 = (2\,1) = (1\,2\,1) = (1V) V J_0 = 1 V I = 1 V I I'^0$ (vgl. auch § 10, **3**, erster Absatz). Deshalb gilt (24) allgemein für $s = 1, 2, 3, \ldots$.

**5.** Zum Schluß soll noch skizziert werden, wie man für $s \geq 3$ eine Zahl $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) \in \mathfrak{A}_s$ rekursiv in eine reguläre Zahlenfigur des konstruktiven Algorithmus umformen kann; damit ist auch die Umwandlung der Zahlen $\pi_1 + \cdots + \pi_m \in \mathfrak{A}_s$, $m > 1$, gegeben. — Wie in Satz 6 sei $\lambda^{(\nu)}$ die Folge der Zahlen $> (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1})$. Dann läßt sich die Formel (20) nach den beiden Interpretationen in **2** so schreiben:

$$\begin{cases} (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}, \alpha_s) = \lambda^{(\nu)}\big((\ldots(V J^{\dot\alpha_1}_{s-2})\ldots) J^{\dot\alpha_{s-1}}_0\big)^{1+\gamma}, \quad \nu \geq 1, \\ \lambda^{(\nu)} \leq \alpha_s = \lambda^{(\nu)} + \gamma < \lambda^{(\nu+1)} = \lambda^{(\nu)}\big((\ldots(V J^{\dot\alpha_1}_{s-2})\ldots) J^{\dot\alpha_{s-2}}_1\big) J^{\dot\alpha_{s-1}+1}_0. \end{cases} \tag{25}$$

Denn nach Satz 5 ist entweder $\lambda^{(\nu+1)} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}+1, \lambda^{(\nu)})$ mit $\lambda^{(\nu)} > (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}+1)$ oder es ist $\lambda^{(\nu+1)} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}+1, \eta+1)$ mit $\lambda^{(\nu)} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}+1, \eta)$. Der angegebene Ausdruck für $\lambda^{(\nu+1)}$ in (25) resultiert im ersten Fall aus $(\mathrm{C}^s_{s-1})$ und im zweiten Fall aus $(\mathrm{B}^s_{s-1})$. Daß aber jedes $\alpha_s \in \mathfrak{A}_s$ in der in (25) angegebenen Weise eingeschachtelt werden kann, folgt aus Satz 6 ($\alpha_s \geq \lambda^{(1)}$ vorausgesetzt).

Die Formel (21) kann man in die Form bringen:

$$\begin{cases} (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}, \alpha_s) = \lambda^{(0)}\big((\ldots(V J^{\dot\alpha_1}_{s-2})\ldots) J^{\dot\alpha_{s-1}}_0\big)^{\dot\alpha_s}, \quad \text{wobei} \\ \lambda^{(0)} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}, 1) \text{ und } 1 \leq \alpha_s < \lambda^{(1)} = \lambda^{(0)}\big((\ldots(V J^{\dot\alpha_1}_{s-2})\ldots) J^{\dot\alpha_{s-2}}_1\big) J^{\dot\alpha_{s-1}+1}_0; \end{cases} \tag{26}$$

der hier angegebene Ausdruck für $\lambda^{(1)}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_{s-1}+1,1)$ ergibt sich aus $(\overline{B}^s_{s-1})$. — Wenn $\alpha_2,\ldots,\alpha_{s-1}$ die entsprechenden Bedingungen erfüllen, kann man $(A^s_{s-1})$ auf $\lambda^{(0)}$ anwenden, so daß (26) liefert:

$$(27)\quad \begin{cases} (\alpha_1,\ldots,\alpha_s)=1\left(\left(\ldots\left(VJ^{\dot\alpha_1}_{s-2}\right)\ldots\right)J^{\dot\alpha_{s-1}}_0\right)^{\alpha_s}, \\ \alpha_2<(\alpha_1+1,1,\ldots,1)_s=1VJ^{\dot\alpha_1+1}_{s-2},\ldots, \\ \alpha_s<(\alpha_1,\ldots,\alpha_{s-2},\alpha_{s-1}+1,1)=1\left(\left(\ldots\left(VJ^{\dot\alpha_1}_{s-2}\right)\ldots\right)J^{\dot\alpha_{s-2}}_1\right)J^{\dot\alpha_{s-1}+1}_0. \end{cases}$$

Analog wie (20) in (25) kann man (22) umformen in

$$(28_p)\quad \begin{cases} (\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-1},\alpha_p,1,\ldots,1)_s=\lambda^{(\nu)}\left(\left(\ldots\left(VJ^{\dot\alpha_1}_{s-2}\right)\ldots\right)J^{\dot\alpha_{p-1}}_{s-p}\right)J^{\alpha_p}_{s-p-1}, \quad \nu\geqq 1, \\ \lambda^{(\nu)}\leqq\alpha_p<\lambda^{(\nu+1)}=\lambda^{(\nu)}\left(\left(\ldots\left(VJ^{\dot\alpha_1}_{s-2}\right)\ldots\right)J^{\dot\alpha_{p-2}}_{s-p+1}\right)J^{\dot\alpha_{p-1}+1}_{s-p}; \quad 2\leq p\leq s-1. \end{cases}$$

Unter $\lambda^{(\nu)}$ ist dabei die Folge der Zahlen $>(\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-1})$ zu verstehen; gegenüber (22) ist in $(28_p)$ der Index $p$ durch $p-1$ ersetzt worden. Entsprechend schreiben wir statt (23):

$$(29_p)\quad \begin{cases} (\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-1},\alpha_p,1,\ldots,1)_s=\lambda^{(0)}\left(\ldots\left(VJ^{\dot\alpha_1}_{s-2}\right)\ldots\right)J^{\dot\alpha_p}_{s-p-1}, \\ \lambda^{(0)}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-1},1,\ldots,1)_s, \\ 2\leq\alpha_p<\lambda^{(1)}=\lambda^{(0)}\left(\left(\ldots\left(VJ^{\dot\alpha_1}_{s-2}\right)\ldots\right)J^{\dot\alpha_{p-2}}_{s-p+1}\right)J^{\dot\alpha_{p-1}+1}_{s-p}, \quad 3\leq p\leq s-1,\ s\geqq 4. \end{cases}$$

Die Formeln (28) und (29) benützen wir, um (26) noch weiter umzugestalten, wenn $(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)$ nicht durch (27) ausgedrückt werden kann. Dann muß es einen Index $q$, $2\leqq q\leqq s-1$, geben, so daß wohl $\alpha_i<(\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-2},\alpha_{i-1}+1,1,\ldots,1)_s$ ist für $q<i\leqq s$, aber $\alpha_q\geqq(\alpha_1,\ldots,\alpha_{q-2},\alpha_{q-1}+1,1,\ldots,1)_s$ ausfällt. Wir zeigen, daß dann, unter $\lambda^{(\nu)}$ die Folge der Zahlen $>(\alpha_1,\ldots,\alpha_{q-1})$ verstanden, die Relation gilt:

$$(30)\quad \begin{cases} (\alpha_1,\ldots,\alpha_{s-1},\alpha_s)=\lambda^{(\nu)}\left(\left(\ldots\left(VJ^{\dot\alpha_1}_{s-2}\right)\ldots\right)J^{\dot\alpha_{s-1}}_0\right)^{\alpha_s}, \quad \text{wobei} \\ \lambda^{(\nu)}\leq\alpha_q<\lambda^{(\nu+1)}=\lambda^{(\nu)}\left(\left(\ldots\left(VJ^{\dot\alpha_1}_{s-2}\right)\ldots\right)J^{\dot\alpha_{q-2}}_{s-q+1}\right)J^{\dot\alpha_{q-1}+1}_{s-q}, \quad 2\leq q\leq s-1, \\ \alpha_{q+1}<(\alpha_1,\ldots,\alpha_{q-1},\alpha_q+1,1,\ldots,1)_s=\lambda^{(\nu)}\left(\left(\ldots\left(VJ^{\dot\alpha_1}_{s-2}\right)\ldots\right)J^{\dot\alpha_{q-1}}_{s-q}\right)J^{\dot\alpha_q+1}_{s-q-1},\ldots, \\ \alpha_s<(\alpha_1,\ldots,\alpha_{s-2},\alpha_{s-1}+1,1)=\lambda^{(\nu)}\left(\left(\ldots\left(VJ^{\dot\alpha_1}_{s-2}\right)\ldots\right)J^{\dot\alpha_{s-2}}_1\right)J^{\dot\alpha_{s-1}+1}_0. \end{cases}$$

Wenn $\alpha_{q+1}=\cdots=\alpha_{s-1}=1$ ist, so ist (30) die unmittelbare Folge von (26) und $(28_q)$ (man beachte $\alpha_q=\dot\alpha_q$). Andernfalls seien $\alpha_{r_1},\ldots,\alpha_{r_k}$, $q+1\leqq r_1<\cdots<r_k\leqq s-1$ genau die von 1 verschiedenen unter den Zahlen $\alpha_{q+1},\ldots,\alpha_{s-1}$. Nach $(29_{r_1})$ wird

$$(\alpha_1,\ldots,\alpha_{r_1},1,\ldots,1)_s=(\alpha_1,\ldots,\alpha_q,1,\ldots,1)_s\left(\ldots\left(VJ^{\dot\alpha_1}_{s-2}\right)\ldots\right)J^{\dot\alpha_{r_1}}_{s-r_1-1},$$

nach $(29_{r_2})$:

$$(\alpha_1,\ldots,\alpha_{r_2},1,\ldots,1)_s=(\alpha_1,\ldots,\alpha_{r_1},1,\ldots,1)_s\left(\ldots\left(VJ^{\dot\alpha_1}_{s-2}\right)\ldots\right)J^{\dot\alpha_{r_2}}_{s-r_2-1}$$

usw. und nach $(29_{r_k})$:

$$(\alpha_1,\ldots,\alpha_{r_k},1,\ldots,1)_s=(\alpha_1,\ldots,\alpha_{r_{k-1}},1,\ldots,1)_s\left(\ldots\left(VJ^{\dot\alpha_1}_{s-2}\right)\ldots\right)J^{\dot\alpha_{r_k}}_{s-r_k-1}.$$

Wegen $\dot{\alpha}_{r_1} \geqq 1, \ldots, \dot{\alpha}_{r_k} \geqq 1$ und $\dot{\alpha}_q = \alpha_q$ ergibt sich, wenn man die rechten Seiten von $(28_q)$ und der vorstehenden Gleichungen sukzessive in die nächstfolgenden einsetzt, vermöge **III**, § 7, Satz 4:

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}, 1) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{r_k}, 1, \ldots, 1)_s$$
$$= \lambda^{(\nu)}\left(\ldots\left(\left(\ldots\left(V J_{s-2}^{\dot{\alpha}_1}\right)\ldots\right) J_{s-r_1-1}^{\dot{\alpha}_{r_1}}\right)\ldots\right) J_{s-r_k-1}^{\dot{\alpha}_{r_k}} = \lambda^{(\nu)}\left(\ldots\left(V J_{s-2}^{\dot{\alpha}_1}\right)\ldots\right) J_0^{\dot{\alpha}_{s-1}}.$$

Führt man den letzten Ausdruck in (26) ein, so kommt wieder (30). Zu zeigen wäre noch, daß die oberen Schranken von $\alpha_{q-1}, \ldots, \alpha_s$ sich in der in (30) angegebenen Weise durch $\lambda^{(\nu)}$ und die $J_n$ ausdrücken lassen. Das folgt aber sofort durch Anwendung der bewiesenen Formel (30).

Mit den Formeln (25), (27) und (30) sind wir offenbar in der Lage, jedes Symbol $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) \in \mathfrak{A}_s$ $(s \geqq 3)$ nach und nach in eine reguläre Zahlenfigur des konstruktiven Algorithmus zu verwandeln. (27) liefert bereits eine solche Figur, wenn wir die $J_n^{\dot{\alpha}_{s-n-1}}$ mit $\dot{\alpha}_{s-n-1} = 0$ weglassen und die übrigen $\dot{\alpha}_{s-n-1}$ sowie $\alpha_s$ bereits als umgewandelt annehmen. In (25) bzw. (30) ist $\lambda^{(\nu)}$ wieder mittels einer der Formeln (25), (27), (30) zu reduzieren usf. Nach endlich vielen Schritten muß dieses Verfahren mit einer letzten Anwendung von (27) seinen Abschluß finden. Die so von „hinten" her, d.h. von rechts nach links, entstandene Zahlenfigur ist regulär, wenn wir wieder die $J_n$ weglassen, die den Exponenten 0 tragen, und die Exponenten erster Stufe $\neq 0$ bereits umgeformt denken.

## Berichtigung.

In **I** [s. [1])] muß es auf S. 412, Zeile 5 von unten heißen: „$I^{(n)}$-Zahlen" statt: „Haupt-$I^{(n)}$-Zahlen", und daselbst, Zeile 4 von unten: „transfiniten Zahlen" statt: „Hauptzahlen". — In **II**, S. 447, Formel (16) sowie den beiden anschließenden Absätzen muß es heißen: „$\varepsilon_1$", „$\varepsilon_r$", „$\varepsilon_i$" statt: „$1 + \varepsilon_1$", „$1 + \varepsilon_r$", „$1 + \varepsilon_i$". — In **III**, S. 13, Formel (37) muß es am Schluß der ersten Zeile heißen: „$\alpha V J \bar{I}_p'$" statt: „$\alpha V J \bar{I}_p$".

*Mainz, Mathematisches Institut der Universität.*

*(Eingegangen am 17. Mai 1954.)*

GUPTA, H. C.
Math. Zeitschr. Bd. 61, S. 70—74 (1954)

# An operational relation.

By
H. C. GUPTA.

*1. Introduction.* While the operational image of a function $f(x)$ which admits of a convergent expansion in ascending powers of $x$ may be obtained by termwise interpretation, no such general method is known of finding the image when $f(x)$ admits of a convergent expansion in ascending powers of $1/x$. In this paper we obtain by the method of contour integration one such general formula, viz.

if
$$h(x) \equiv \sum_{r=0}^{\infty} (-)^r G(r)/(r!\, x^{\varrho+1+\nu r}),$$

then

$$(1) \quad \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-)^r}{r!} \left\{ G(r)\, \Gamma(-\nu r - \varrho)\, p^{\nu r + \varrho - 1} + \frac{1}{\nu}\, \Gamma\left(\frac{\varrho - r}{\nu}\right) G\left(\frac{r - \varrho}{\nu}\right) p^{r-1} \right\} \equiv f(p),$$

where

$$(2) \quad G(r) \equiv \prod_{q=1}^{m} \{\Gamma(a_q + \alpha_q r)\} \Big/ \prod_{q=1}^{n} \{\Gamma(b_q + \beta_q r)\},$$

under the restrictions

$$-1 < \Sigma \beta_q - \Sigma \alpha_q = \sigma, \qquad \Sigma |\beta_q| - \Sigma \alpha_q = \delta < 1,$$

$\mathrm{Re}(\nu a_q/\alpha_q - \varrho) > 0$ and $\nu$, $\alpha_q$'s are positive and real, while $\beta_q$'s are real.

The formula (1) also holds when $\sigma = -1 = \delta$ if $h(x)$ is defined by its analytic continuation when $x < 1$.

*2. A contour integral for $f(p)$.* The image function $f(p)$ in (1) can be represented by BARNES's integral [*1*]

$$(3) \quad \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{-\Gamma(-s)\, \Gamma(-\nu s - \varrho) \prod \{\Gamma(a_q + \alpha_q s)\}}{\prod \{\Gamma(b_q + \beta_q s)\}}\, p^{\nu s + \varrho + 1}\, ds, \right.$$

$$\sigma + \nu > -1, \qquad \nu > 0, \qquad \alpha\text{'s} > 0,$$

the integral being taken round a contour $C$ which embraces the positive half of the real axis and encloses all the poles of the integrand except those of $\prod \{\Gamma(a_q + \alpha_q s)\}$.

Proof. By the asymptotic expansion of the Gamma function [*2*, p. 223] we know that if $|\arg s| < \pi$ and $|s|$ be large, then

$$(4) \quad |\Gamma(s + \alpha)| \sim |s^{s+\alpha-\frac{1}{2}} e^{-s}|\, \sqrt{2\pi}\, I,$$

where $I$ tends uniformly to unity as $|s| \to \infty$.

Hence the integral (3) is absolutely convergent, since $\nu+\sigma+1>0$. By Cauchy's theory of residues it is therefore equal to the sum of the residues at the poles of the integrand inside the contour. Now the residue of $\Gamma(a-\nu s)$ at its pole $\nu s=a+n$ is $(-)^{n-1}/(\nu\,.\,n!)$; and the integral is easily seen to be equal to the image function $f(p)$.

*3. Asymptotic expansion of $f(p)$.* If $s=u+iv$, where $u$ is finite and $|v|$ is large, (4) becomes

$$|\Gamma(s+\alpha)| = \exp\{-\tfrac{1}{2}\pi|v|\}\,|v^{\alpha+u-\frac{1}{2}}\,e^{\pm\frac{1}{2}\pi i\alpha}|\sqrt{2\pi}\,I,$$

the $+$ or $-$ sign being taken according as $v$ is positive or negative. Hence the contour integral will vanish when taken round that part of a great circle at infinity for which $R(s)>-k$, where $k$ is any finite positive quantity, provided that

$$|\arg p|<\tfrac{1}{2}\pi\{1+(1-\delta)/\nu\}.$$

If then $L$ is a line parallel to the imaginary axis, passing through the point $-k$ $(k>0)$ on the real axis, such that the lower bound of the poles of the integrand in (3) from the line $L$, and on the right of it, is a positive number $\varepsilon$ (the point $-k$ not being a pole), we shall have

$$f(p)=(-2\pi i)^{-1}\int_L - S,$$

where $S$ denotes the sum of the residues of the integrand at such of its poles as lie between $L$ and $C$. Also translating the $y$-axis a distance $k$ to the left, we have

$$-\int_L \equiv p^{\varrho+1-k\nu}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\Gamma(-s+k)\,\Gamma(-\nu s+\nu k-\varrho)\,\Pi\{\Gamma(a_q-k\alpha_q+s\alpha_q)\}}{\Pi\{\Gamma(b_q-k\beta_q+s\beta_q)\}}\,p^{\nu s}\,ds$$
$$=p^{\varrho+1-k\nu}O(1).$$

Thus it is evident that $f(p)\sim -S+J_k$ such that $|J_k p^{-\varrho-1+\nu(k-\varepsilon)}|$, for any positive value of $k$, can be made as small as we please by taking $|p|$ sufficiently large. Now the affix of the pole which is on the right of the line $L$ and nearest to it is $-k+\varepsilon=-(a_q+t)/\alpha_q$, say, $t$ being a positive integer. Evaluating the residues and letting $k$, and consequently $t$ as well, tend to $\infty$ we have the asymptotic expansion

$$\frac{f(p)}{p}\sim\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{q=1}^{m}\frac{(-)^r\,\Gamma(R')\,\Gamma(-\varrho+\nu R')\,\prod_{j=1}^{m}{}'\,\Gamma(a_j-\alpha_j R')}{\alpha_q\,.\,r!\,\prod_{j=1}^{n}{}'\{\Gamma(b_j-\beta_j R')\}\,p^{-\varrho+\nu R'}}, \tag{5}$$

where $R'=(a_q+r)/\alpha_q$ and the dash on $\Pi$ indicates that the factor corresponding to $j=q$ is to be left out.

*4. Original of $f(p)$.* First suppose that $\sigma>-1$ and $\delta<1$. Take a contour [3] $Br'$ within the reflex angle $BOA$, where

$$\tfrac{1}{2}\pi<\widehat{BOX}=\widehat{XOA}<\tfrac{1}{2}\pi\{1+(1-\delta)/\nu\},$$

and to the left of the line $c\pm i\infty$, enclosing the negative half of the real axis.

Now by the asymptotic expansion (5), it is evident that the integral $\int \exp(px)\, f(p)\, dp/p$, $(x>0)$, will vanish when taken round those parts of a great circle at infinity which connect $Br'$ to the line $c \pm i\infty$, provided that $\mathrm{Re}\,(\nu a_q/\alpha_q - \varrho) > 0$. Further the integrand has no poles to the right of $Br'$. Hence provided that $x$ is positive and real,

$$F(x) \equiv \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{px} \frac{f(p)}{p}\, dp = \int_{Br'} e^{px} \frac{f(p)}{p}\, dp$$
$$= -(2\pi i)^{-1} \int_C \Gamma(-s)\, \Gamma(-\nu s - \varrho)\, G(s)\, ds \int_{Br'} e^{px} p^{\nu s+\varrho}\, dp,$$

on substituting for $f(p)/p$ from (3) and inverting the order of integration—which is justified by de la Vallée Poussin's theorem [4], since both the $s$- and $p$-integrals are absolutely convergent and the double integral exists. Now the $p$-integral [2, p. 227] is equal to

$$\int_{-\infty}^{(0+)} e^{px} p^{\nu s+\varrho}\, dp = 2\pi i / \Gamma(-\nu s - \varrho)\, x^{\nu s+\varrho+1}.$$

Hence

$$F(x) = -\int_C \Gamma(-s)\, G(s)\, ds / x^{\nu s+\varrho+1}, \tag{6}$$

which is absolutely convergent by virtue of (4) since $1+\sigma > 0$. Evaluating the residues of the integrand at its poles $s = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{px} \frac{f(p)}{p}\, dp = \frac{F(x)}{2\pi i} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-)^r G(r)}{r!\, x^{\nu r+\varrho+1}} \equiv h(x), \text{ say.} \tag{7}$$

This $h(x)$ is a continuous function of $x$ and its asymptotic expansion as $1/x \to \infty$ can be obtained like that of $f(p)$. It is found that if $\sigma > -1$, then

$$h(x) = O(x^{-\varrho-1+a\nu}), \quad \text{as} \quad x \to 0,$$

where $a$ is the smallest of the numbers $a_q/\alpha_q$, $q = 1, 2, \ldots, m$.

Also as $x \to \infty$, $h(x) = O(x^{-\varrho-1})$.

Therefore $\int_0^{\infty} e^{-px} h(x)\, dx$ is convergent if $\mathrm{Re}\,(a\nu - \varrho) > 0$ and the convergence is absolute. Hence Mellin's theorem applied to (7) shows that

$$p \int_0^{\infty} e^{-px} h(x)\, dx = f(p),$$

which establishes (1) under the restrictions

$$\sigma > -1, \quad \delta < 1, \quad \mathrm{Re}\,(\nu a_q/\alpha_q - \varrho) > 0, \quad \nu > 0 \quad \text{and} \quad \alpha_q\text{'s} > 0.$$

*5. Extension of the range of validity.* When $\beta_q$'s are all positive, $\sigma = \delta$. If then $\sigma = \delta = -1$, the integral (6) is absolutely convergent for $x > 1$, and so is the series for $h(x)$. For $0 < x < 1$, we start with the contour $-c \pm i\infty$, $c > 0$ in place of the contour $C$ in (3). The corresponding integral (6) vanishes

when taken round an infinite semicircle to the left of the imaginary axis; and $h(x)$ is seen to be equal to

$$(8)\qquad \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{q=1}^{m}\frac{(-)^r\,\Gamma(R')\prod_{j=1}^{m}{}'\Gamma(a_j-\alpha_j R')\,x^{\nu R'-\varrho-1}}{\alpha_q\cdot r!\prod_{j=1}^{n}{}'\Gamma(b_j-\beta_j R')},$$

where $R'$ and the dash on $\prod$ have the same meanings as in (5), and the asymptotic expansion of this function is the series for $h(x)$ in (1). Thus the relation (1) holds when $\sigma=-1$, provided that (8) represents $h(x)$ when $x<1$.

*6. Particular cases of* (1). A few cases of specialisation of (1), when the image function $f(p)$ and the original function $h(x)$ are expressible in terms of known functions, are given below:

(i) Taking $\nu=1$, $m=0=n$, we are led to the relation

$$2p^{1+\frac{1}{2}\varrho}K_{\varrho}\left(2\sqrt{p}\right)\prec e^{-\frac{1}{x}}/x^{\varrho+1},$$

which is a special case of GOLDSTEIN's relation [5].

(ii) Put $\nu=1$, $m=1$, $n=0$, $\alpha_1=1$, and $a_1=\lambda+\frac{1}{2}\varrho$; then we find that [6]

$$p^{\frac{1}{2}\varrho+\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}p}W_{\frac{1}{2}-\lambda,\frac{1}{2}\varrho}(p)\prec x^{\lambda-\frac{1}{2}\varrho-1}/(1+x)^{\lambda+\frac{1}{2}\varrho},\qquad \mathrm{Re}\,(\lambda-\tfrac{1}{2}\varrho)>0.$$

(iii) When $1=\nu=m=n=\alpha_1=\beta_1$ and $a_1=\varrho+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}b_1$, we have [7]

$$2p\,K_{\varrho}\left(\sqrt{p}\right)I_{\varrho}\left(\sqrt{p}\right)\prec(1/x)\exp(-1/2x)\,I_{\varrho}(1/2x).$$

(iv) Lastly, if $\nu=\frac{1}{2}$, $m=0$, $n=1$, $\beta_1=\frac{1}{2}$ and $b_1=1-\varrho$, we get

$$p^{\varrho+1}J_{-2\varrho}(2p^{\frac{1}{2}})\,K_{2\varrho}(2p^{\frac{1}{2}})\prec\sqrt{\pi}\,2^{(2\varrho+1)/3}\,x^{-4\varrho/3-7/6}\times$$
$$\times[(-)^{(2\varrho+1)/6}J_{-\varrho,-\frac{1}{3}}\{-3(4x)^{-\frac{1}{3}}\}+(-)^{(\varrho+2)/3}J_{\frac{1}{3}-\varrho,-\frac{1}{3}}\{-3(4x)^{-\frac{1}{3}}\}],$$

where $J_{m,n}(x)$ is the Humbert function defined as

$$J_{m,n}(x)=(\tfrac{1}{3}x)^{m+n}{}_0F_2(m+1,n+1;-\tfrac{1}{27}x^3)/\Gamma(m+1)\,\Gamma(n+1).$$

The expansions in infinite series of the various Bessel functions and Whittaker's function and of their products used in deducing the above particular cases are well-known [8].

The two infinite series in (1) are expressible by one in the cases (*a*) $\nu=1$, $\varrho=-\frac{1}{2}$ and (*b*) $\nu=1$, $\varrho=\frac{1}{2}$. In case (*a*) the image function $f(p)$ becomes

$$\sum_{r=0}^{\infty}\left((-)^r/r!\right)\{G(r)\,\Gamma(-r+\tfrac{1}{2})\,p^{r+\frac{1}{2}}+\Gamma(-\tfrac{1}{2}-r)\,G(r+\tfrac{1}{2})\,p^{r+1}\}$$
$$=\sqrt{\pi p}\sum_{r=0}^{\infty}\{G(\tfrac{1}{2}r)\,(-2)^r\,p^{\frac{1}{2}r}/r!\};$$

and we are led to the formula

$$(9)\qquad \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-)^r\,G(r)}{r!\,x^{r+\frac{1}{2}}}\succ\sqrt{\pi}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{G(\frac{1}{2}r)\,(-2)^r\,p^{\frac{1}{2}r+\frac{1}{2}}}{r!}.$$

Further, if we take every $\alpha$ and $\beta$ to be equal to 2 and use the formula

$$\Gamma(2a+2r) = 2^{2r}\,\Gamma(2a)\,(a,r)\,(a+\tfrac{1}{2},r),$$

then either member of (9) can be expressed by only one generalized hypergeometric function and we arrive at the known relation [9]

$$(10)\qquad \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi x}}\,{}_{2m}F_{2n}\left(\begin{matrix} a_q,\ a_q+\tfrac{1}{2},\ q=1,2,\ldots,m; \\ b_q,\ b_q+\tfrac{1}{2},\ q=1,2,\ldots,n; \end{matrix} -\frac{2^{2m-2n}}{x}\right) \right.$$
$$\left. > \sqrt{p}\,{}_mF_n\left(\begin{matrix} a_1,\ a_2,\ldots,a_m; \\ b_1,\ b_2,\ldots,b_n; \end{matrix} -2\sqrt{p}\right)\right\}.$$

By analytic continuation this relation holds for $m \leqq n$. In case (b) we have corresponding to (9) and (10) the relations

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-)^r\,G(r)}{r!\,x^{r-\frac{3}{2}}} > \sqrt{\pi} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-2)^r\,G(\tfrac{1}{2}r-\tfrac{1}{2})\,p^{\frac{1}{2}r-1}}{r!},$$

and

$$\frac{1}{\sqrt{\pi x^3}}\,{}_{2m}F_{2n}\left(\begin{matrix} a_q,\ a_q+\tfrac{1}{2},\ q=1,\ldots,m; \\ b_q,\ b_q+\tfrac{1}{2},\ q=1,\ldots,n; \end{matrix} -\frac{2^{2m-2n}}{x}\right) >$$
$$> p\,{}_mF_n\left(\begin{matrix} a_1-1,\ldots,a_m-1; \\ b_1-1,\ldots,b_n-1; \end{matrix} -2\sqrt{p}\right).$$

Besides the above, the special cases of (1) when $r=1$, 2 and $\frac{1}{2}$ have been obtained by a different method by Gupta [8]. These occur as Results 18, 19 and 20 and admit of a number of interesting particular cases when the original $h(x)$ can be expressed in terms of known functions.

I am indebted to the referee for pointing out that some general particular cases are to be found in "Tables of Integral Transforms" by Erdélyi-Magnus-Oberhettinger-Tricomi, Vol. I, p. 220.

## Bibliography.

[1] Barnes, E. W.: The asymptotic expansion of integral functions defined by generalised hypergeometric series. Proc. Lond. Math. Soc. (2) **5**, 59—116 (1907). — [2] Copson, E. T.: Functions of a complex variable. Oxford 1935. — [3] Bromwich, T. J. I'A.: Normal coordinates in dynamical systems. Proc. Lond. Math. Soc. (2) **15**, 401—448 (1916). See also McLachlan, N. W.: Complex variable and operational calculus, p. 91. Cambridge 1939. — [4] Bromwich, T. J. I'A.: Theory of infinite series. Macmillan 1942. — [5] Goldstein, S.: Operational representations of Whittaker's confluent hypergeometric function and Weber's parabolic cylinder function. Proc. Lond. Math. Soc. (2) **34**, 103—125 (1932). — [6] Whittaker, E. T., and G. N. Watson: Modern analysis, p. 340. Cambridge 1927. — [7] Mitra, S. C.: On certain integrals and expansions involving Bessel functions. Bull. Calc. Math. Soc. **25**, 81—98 (1933). — [8] Gupta, H. C.: On operational calculus. Proc. Nat. Inst. of Sci. India **14**, 131—156 (1948). — [9] Cossar, J., and A. Erdélyi: Dictionary of Laplace transforms Pt. 3 B, 67 Adm. Comp. Ser. London 1946.

*Muslim University, Aligarh (India) and University of Manchester (England).*

*(Eingegangen am 18. Mai 1953.)*

Pati, T.
Math. Zeitschr. Bd. 61, S. 75—78 (1954)

# A Tauberian theorem for absolute summability.

By
T. Pati.

1.1. *Definition.* Let $\sum_1^\infty a_n$ be a given infinite series, and $\lambda_n$ a positive, steadily increasing, monotonic function of $n$, tending to infinity with $n$. We write

$$A_\lambda(\omega) = A_\lambda^0(\omega) = \sum_{\lambda_n \leq \omega} a_n,$$

and

$$A_\lambda^r(\omega) = \sum_{\lambda_n \leq \omega} (\omega - \lambda_n)^r a_n \quad (r > 0).$$

The series $\sum a_n$ is said to be absolutely summable $(R, \lambda, r)$, or summable $|R, \lambda, r|$, $r \geq 0$, if $A_\lambda^r(\omega)/\omega^r$ is of bounded variation in $(A, \infty)$, where $A$ is a finite positive number[1]). We may, for example, take $A = \lambda_1$.

It is evident that summability $|R, \lambda, 0|$ is equivalent to absolute convergence.

1.2. The first theorem of consistency for absolute Riesz summability, given by Obrechkoff, runs as follows.

Theorem A[1]). *If an infinite series $\sum a_n$ is summable $|R, \lambda, r|$, $r \geq 0$, then it is summable $|R, \lambda, k|$ for $k > r$.*

It is known that a series which is summable $|R, \lambda, k|$ is not necessarily summable $|R, \lambda, r|$ when $r < k$. The object of this paper is to find additional conditions so that summability $|R, \lambda, k|$, $k > 0$, may imply summability $|R, \lambda, 0|$, which will constitute a Tauberian theorem for absolute Riesz summability.

It may be mentioned that the theorem of this paper includes as a particular case Theorem *C* of the paper "A criterion for the absolute convergence of a Fourier series", recently published in Proc. London Math. Soc. (2)[2]).

My warmest thanks are due to Dr. B. N. Prasad for his kind encouragement and helpful guidance.

2.1. Theorem. *If* (i) $\sum a_n$ *is summable* $|R, \lambda, k|$, $k > 0$, (ii) $\{a_n \lambda_n/(\lambda_n - \lambda_{n-1})\}$ *is a sequence of bounded variation and* (iii) $\{\lambda_n/\lambda_{n+1}\}$ *is a sequence of bounded variation, then* $\sum a_n$ *is absolutely convergent.*

2.2. We require the following lemmas for the proof of our theorem.

Lemma 1[3]). *Let* $\mu_m > 0$,

$$\lambda_m = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_m,$$

*and*

$$d_m = \frac{\mu_1 c_1 + \mu_2 c_2 + \cdots + \mu_m c_m}{\lambda_m}.$$

---

[1]) Obrechkoff [2] and [3].
[2]) Mohanty [1].
[3]) Mohanty [1], Lemma 4.

*Then, if the sequence $\{c_m\}$ is of bounded variation, the sequence $\{d_m\}$ is of bounded variation.*

Lemma 2. *Let* $\mu_m > 0$,

$$\lambda_m = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_m,$$

*and*

$$d_m = \frac{\sum_{n=1}^{m} \mu_n (\lambda_{m+1} - \lambda_n)^{\varkappa} c_n}{\lambda_{m+1}^{\varkappa+1}},$$

*where* $\varkappa = 0, 1, 2, \ldots$. *Then, if the sequence $\{c_m\}$ is of bounded variation and the sequence $\{\lambda_m/\lambda_{m+1}\}$ is of bounded variation, the sequence $\{d_m\}$ is of bounded variation.*

Proof. Expanding $(\lambda_{m+1} - \lambda_n)^{\varkappa}$ by the binomial theorem, we observe that the lemma will be proved if only we establish that, under the hypotheses of the lemma, the sequence

$$\left\{ \frac{\sum_{n=1}^{m} \mu_n \lambda_n^s c_n}{\lambda_{m+1}^{s+1}} \right\} \qquad (s = 0, 1, 2, \ldots, \varkappa)$$

is of bounded variation. Now

$$\frac{\sum_{n=1}^{m} \mu_n \lambda_n^s c_n}{\lambda_{m+1}^{s+1}} = \frac{\sum_{n=1}^{m} \mu_n \lambda_n^s c_n}{\sum_{n=1}^{m} \mu_n \lambda_n^s} \cdot \frac{\sum_{n=1}^{m} \mu_n \lambda_n^s}{\lambda_{m+1}^{s+1}}.$$

Hence, by virtue of Lemma 1, $\{d_m\}$ will be a sequence of bounded variation, if the sequence

$$(*) \qquad \left\{ \frac{\sum_{n=1}^{m} \mu_n \lambda_n^s}{\lambda_{m+1}^{s+1}} \right\} \qquad (s = 0, 1, 2, \ldots, \varkappa)$$

is of bounded variation. We proceed to prove this.

We have, by Abel's transformation,

$$\frac{\sum_{n=1}^{m} \mu_n \lambda_n^s}{\lambda_{m+1}^{s+1}} = \frac{\sum_{n=1}^{m-1} \Delta\lambda_n \sum_{\nu=1}^{n} \mu_\nu \lambda_\nu^{s-1}}{\lambda_{m+1}^{s+1}} + \frac{\lambda_m}{\lambda_{m+1}} \cdot \frac{\sum_{\nu=1}^{m} \mu_\nu \lambda_\nu^{s-1}}{\lambda_{m+1}^{s}}$$

$$= \frac{\sum_{n=1}^{m-1} \Delta\lambda_n \left( \frac{\sum_{\nu=1}^{n} \mu_\nu \lambda_\nu^{s-1}}{\lambda_{n+1}^{s}} \right) \lambda_{n+1}^{s}}{\lambda_{m+1}^{s+1}} + \frac{\lambda_m}{\lambda_{m+1}} \cdot \frac{\sum_{\nu=1}^{m} \mu_\nu \lambda_\nu^{s-1}}{\lambda_{m+1}^{s}}$$

$$= - \frac{\sum_{n=1}^{m-1} (\lambda_{n+1}^{s+1} - \lambda_n^{s+1}) \left( \frac{\sum_{\nu=1}^{n} \mu_\nu \lambda_\nu^{s-1}}{\lambda_{n+1}^{s}} \right) \left( \frac{\lambda_{m+1}^{s}}{\lambda_n^{s} + \cdots + \lambda_{n+1}^{s}} \right)}{\lambda_m^{s+1} - \lambda_1^{s+1}} \cdot \frac{\lambda_m^{s+1} - \lambda_1^{s+1}}{\lambda_{m+1}^{s+1}} +$$

$$+ \frac{\lambda_m}{\lambda_{m+1}} \cdot \frac{\sum_{\nu=1}^{m} \mu_\nu \lambda_\nu^{s-1}}{\lambda_{m+1}^{s}}.$$

We observe at this stage that the sequence

$$\left\{\frac{\lambda_{m+1}^s}{\lambda_m^s+\lambda_m^{s-1}\lambda_{m+1}+\cdots+\lambda_{m+1}^s}\right\}$$

is of bounded variation, since

$$\frac{1}{\lambda_{m+1}^s}(\lambda_m^s+\lambda_m^{s-1}\lambda_{m+1}+\cdots+\lambda_{m+1}^s)$$
$$=\left(\frac{\lambda_m}{\lambda_{m+1}}\right)^s+\left(\frac{\lambda_m}{\lambda_{m+1}}\right)^{s-1}+\cdots+\frac{\lambda_m}{\lambda_{m+1}}+1$$

is of bounded variation and $>1$. If, now, we assume that the sequence

$$\left\{\frac{\sum_{\nu=1}^{m}\mu_\nu\lambda_\nu^{s-1}}{\lambda_{m+1}^s}\right\}$$

is of bounded variation, then by Lemma 1 and by virtue of the bounded variation of $\{\lambda_m/\lambda_{m-1}\}$ the sequence (*) will be of bounded variation. Repeating the same reasoning, we conclude that the sequence (*) is of bounded variation if only the sequence

$$\left\{\frac{\sum_{\nu=1}^{m}\mu_\nu}{\lambda_{m+1}}\right\},$$

that is, the sequence $\{\lambda_m/\lambda_{m-1}\}$ be of bounded variation, which, by hypothesis, is the case. This completes the proof of Lemma 2.

2.3. Proof of the Theorem.

By virtue of the first theorem of consistency (Theorem A) we can assume, without loss of generality, that $k$ is a positive integer $\geq 1$. Let $k=\varkappa+1$, where $\varkappa=0, 1, 2, \ldots$.

We have

$$\frac{A_\lambda^{\varkappa+1}(\lambda_{m+1})}{\lambda_{m+1}^{\varkappa+1}}=\lambda_{m+1}^{-\varkappa}\sum_{n=1}^{m}(\lambda_{m+1}-\lambda_n)^\varkappa a_n-$$
$$-\lambda_{m+1}^{-(\varkappa+1)}\sum_{n=1}^{m}(\lambda_{m+1}-\lambda_n)^\varkappa\lambda_n a_n$$
$$=s_m-\lambda_{m+1}^{-1}\sum_{n=1}^{m}\lambda_n a_n-$$
$$-\lambda_{m+1}^{-2}\sum_{n=1}^{m}(\lambda_{m+1}-\lambda_n)\lambda_n a_n-$$
$$-\cdots-$$
$$-\lambda_{m+1}^{-\varkappa}\sum_{n=1}^{m}(\lambda_{m+1}-\lambda_n)^{\varkappa-1}\lambda_n a_n-$$
$$-\lambda_{m+1}^{-(\varkappa+1)}\sum_{n=1}^{m}(\lambda_{m+1}-\lambda_n)^\varkappa\lambda_n a_n.$$

Therefore

$$\begin{aligned}\sum |\Delta s_m| \leq & \sum |\Delta \{\lambda_{m+1}^{-1} \sum_{n=1}^{m} \lambda_n a_n\}| + \\ & + \cdots + \\ & + \sum |\Delta \{\lambda_{m+1}^{-(\varkappa+1)} \sum_{n=1}^{m} (\lambda_{m+1} - \lambda_n)^{\varkappa} \lambda_n a_n\}| + \\ & + \sum |\Delta \{A_{\lambda}^{\varkappa+1}(\lambda_{m+1})/\lambda_{m+1}^{\varkappa+1}\}| \\ \leq & \sum \Delta \left\{\lambda_{m+1}^{-1} \sum_{n=1}^{m} \mu_n \left(\frac{\lambda_n a_n}{\mu_n}\right)\right\}| + \\ & + \cdots + \\ & + \sum \left|\Delta \left\{\lambda_{m+1}^{-(\varkappa+1)} \sum_{n=1}^{m} \mu_n (\lambda_{m+1} - \lambda_n)^{\varkappa} \left(\frac{\lambda_n a_n}{\mu_n}\right)\right\}\right| + \\ & + \int_{\lambda_1}^{\infty} \left|\frac{d}{d\omega}\left\{\frac{A_{\lambda}^{\varkappa+1}(\omega)}{\omega^{\varkappa+1}}\right\}\right| d\omega .\end{aligned}$$

Hence, by Lemma 2 and hypotheses (i) and (ii), $\sum_m |\Delta s_m|$ is convergent, that is, $\sum a_n$ is absolutely convergent. This completes the proof of the theorem.

## References.

[1] Mohanty, R.: A criterion for the absolute convergence of a Fourier series. Proc. London Math. Soc. (2) **51**, 186—196 (1949). — [2] Obrechkoff, N.: Sur la sommation absolue des séries de Dirichlet. C. R. Acad. Sci. Paris **186**, 215—217 (1928). — [3] Obrechkoff, N.: Über die absolute Summierung der Dirichletschen Reihen. Math. Z. **30**, 375—386 (1929).

*Dept. of Math., University of Allahabad (India).*

*(Eingegangen am 8. Mai 1954.)*

Siddiqi, J. A.
Math. Zeitschr. Bd. 61, S. 79—81 (1954)

# On a theorem of Fejér.

By
Jamil A. Siddiqi.

1. Let $f(x)$ be a function integrable in the sense of Lebesgue and periodic with period $2\pi$ and let the series conjugate to its Fourier series be

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n\cos n\,x - a_n \sin n\,x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x). \tag{1}$$

Fejér [1][1]) (see also Zygmund [3] p. 62) has proved that if $f(x)$ is of bounded variation, then the sequence $n\,c_n(x)$ is summable $(C, r)$ $(r>0)$ [2]) to $\pi^{-1}\{f(x+0) - f(x-0)\} = \pi^{-1}D(x)$ at every point of jump of the function $f(x)$. In this note we extend this result to certain general regular triangular methods of summability which contain that of Cesàro as a particular case. As an immediate corollary of our theorem we obtain that under the same hypothesis as that of Fejér's theorem, $n\,c_n(x)$ is summable by harmonic means to $\pi^{-1}D(x)$. This sharpens the theorem of Fejér in view of the fact that whenever a sequence is summable by harmonic means it is summable $(C, r)$ for every $r > 0$ but not conversely, a result due to M. Riesz [2].

2. Let

$$\Lambda = (\lambda_{n,k}) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots;\ k = 1, 2, \ldots, n;\ \lambda_{n,0} = 1)$$

be a triangular matrix of real or complex numbers. The sequence $(s_n)$ is said to be summable $(\Lambda)$ if

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \Delta\lambda_{n,k}\, s_k \qquad (\Delta\lambda_{n,k} = \lambda_{n,k} - \lambda_{n,k+1})$$

exists. The conditions of regularity are

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_{n,k} = 1 \qquad \text{for every fixed } k; \tag{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n} |\Delta\lambda_{n,k}| \leq M \qquad \text{independently of } n. \tag{3}$$

We prove the following

Theorem. *Let $f(x)$ be a function of bounded variation in $[0, 2\pi]$ and periodic with period $2\pi$. If $(\Lambda)$ is regular and if*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} |\Delta^2\lambda_{n,k}| = 0, \qquad (\Delta^2\lambda_{n,k} = \Delta\lambda_{n,k} - \Delta\lambda_{n,k+1}) \tag{4}$$

*the sequence $n\,c_n(x)$ is summable $(\Lambda)$ to $D(x)/\pi$ at every point $x$ of jump of $f(x)$.*

[1]) The numbers within the paranthesis refer to the bibliography at the end.

[2]) Fejér has proved the theorem for $r = 1$ only but its extension for $r > 0$ is direct and already known.

*Proof.* Let $x \in [0, 2\pi]$ be a point of jump of the function $f(x)$. Consider

$$\sum_{k=0}^{n} \Delta \lambda_{n,k} k (b_k \cos k x - a_k \sin k x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \Delta \lambda_{n,k} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \psi_x(t) k \sin k t \, dt$$

$$= \frac{D(x)}{\pi} \sum_{k=0}^{n} \Delta \lambda_{n,k} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sum_{k=0}^{n} \Delta \lambda_{n,k} \cos k t \, d\psi_x(t)$$

$$= \frac{D(x)}{\pi} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} K_n(t) \, d\psi_x(t),$$

where $\psi_x(t) = f(x+t) - f(x-t)$ and $K_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \Delta \lambda_{n,k} \cos k t$. We have to prove that under the conditions of the theorem

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{\pi} K_n(t) \, d\psi_x(t) = 0.$$

Since $\psi_x(t)$ is of bounded variation in $[0, \pi]$, given $\varepsilon > 0$, there exists a $\delta = \delta(\varepsilon)$ such that

$$\int_0^{\delta} |d\psi_x(t)| < \varepsilon,$$

and, therefore, by virtue of (3),

$$\left| \int_0^{\delta} K_n(t) \, d\psi_x(t) \right| \leq A \varepsilon.$$

By Abel's transformation we have

$$K_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \Delta^2 \lambda_{n,k} \frac{\sin (k + \frac{1}{2}) t}{2 \sin \frac{1}{2} t} + \frac{1}{2} \Delta \lambda_{n,0}$$

and, therefore, since (2) and (4) hold, for fixed $\delta$, we can choose $n_0 = n_0(\varepsilon)$ such that for $n \geq n_0$,

$$\max_{(\delta, \pi)} |K_n(t)| < \varepsilon.$$

It follows that for $n \geq n_0$

$$\left| \int_{\delta}^{\pi} K_n(t) \, d\psi_x(t) \right| \leq B \varepsilon.$$

Consequently, we have for $n \geq n_0$,

$$\left| \int_0^{\pi} K_n(t) \, d\psi_x(t) \right| \leq (A + B) \varepsilon,$$

and the proof of the theorem is thus completed.

3. If we choose $\lambda_{n,k} = \frac{P_{n-k}}{P_n}$ and put $p_n = P_n - P_{n-1}$, $p_0 = P_0$, the $(A)$ method of summability reduces to Nörlund's $(N, p_n)$ method of summability. It is easily seen that the regularty conditions reduce to

$$\lim_{n \to \infty} p_n / P_n = 0, \tag{2'}$$

$$\sum_{k=0}^{n} |p_k| \leq M |P_n| \quad \text{independently of } n, \tag{3'}$$

and, therefore, for regular $(N, p_n)$ methods our theorem holds provided

$$\lim_{n \to \infty} \left\{ \sum_{k=0}^{n} |\Delta p_k| \, |P_n| \right\} = 0, \qquad \lim_{n \to \infty} |P_n| = \infty \qquad (\Delta p_k = p_k - p_{k-1}). \tag{4'}$$

The $(C, r)$ $(r > 0)$ and the harmonic methods which correspond respectively to the choices $p_n = \binom{n + r - 1}{r}$ and $p_n = \frac{1}{n+1}$, are regular methods of summability and it can easily be verified that they satisfy the condition (4'). Our theorem, thus, includes that of Fejér as a special case and, as we have remarked in § 1, it sharpens it because, if $f(x)$ is periodic and of bounded variation, the sequence $n c_n(x)$ is summable $\left(N, \frac{1}{n+1}\right)$ and the summability $\left(N, \frac{1}{n+1}\right)$ implies the summability $(C, r)$ for every $r > 0$, but not conversely.

## References.

[1] Fejér, L.: J. reine angew. Math. **142**, 165—188 (1913). — [2] Riesz, M.: Proc. London Math. Soc. **22**, 412—419 (1924). — [3] Zygmund, A.: Trigonometrical Series, Warszawa-Lwów, 1935.

*Dept. of Math., Muslim University, Aligarh (India).*

*(Eingegangen am 26. Juni 1954.)*

WEIER, J.
Math. Zeitschr. Bd. 61, S. 82—93 (1954)

# Die Homotopieinvarianz der algebraischen Fixpunktzahl.

Von
JOSEF WEIER.

Sind $P$ eine endliche simplizial zerlegbare Mannigfaltigkeit und $g, h$ homotope Abbildungen von $P$ in sich, deren jede höchstens endlich viele Fixpunkte hat, so stimmen die Summen der Indizes der Fixpunkte von $g$ und $h$ überein. Dieser Satz behauptet die Homotopieinvarianz der Indexsummen; man kann ihn mit Hilfe der LEFSCHETZschen Zahl oder der HOPFschen Spureninvariante beweisen. In der vorliegenden Arbeit wird ein Beweis angegeben, der ohne die in Rede stehenden Konstanten auskommt und überdies auch für kompakte topologische Mannigfaltigkeiten gilt.

Wie Abschnitt 3 zeigt, läßt sich das vorerwähnte Invarianztheorem leicht auf folgenden einfacheren Satz zurückführen: *Es seien $U$ eine in $P$ offene Menge und $g, h$ stetige Abbildungen von $P$ in sich mit*

$$p \neq g(p) = h(p), \quad \text{wenn} \quad p \in P - U,$$

*und den Eigenschaften: für $p \in \bar{U}$ sind $\varrho(p, g(p))$ und $\varrho(p, h(p))$ hinreichend klein; $g$ und $h$ haben nur endlich viele Fixpunkte. Dann stimmen die Indexsummen von $g$ und $h$ überein.* — Dabei bezeichnet $\bar{U}$ die abgeschlossene Hülle von $U$ und $\varrho(a, b)$ die Entfernung der Punkte $a$ und $b$. Dem Beweis des letzten Satzes dienen die Abschnitte 1 und 2: Abschnitt 1 durch Herleitung eines Satzes im Kleinen, Abschnitt 2 durch Rückführung des in Rede stehenden Satzes auf den Satz im Kleinen.

Die weiterhin behandelten kompakten topologischen Mannigfaltigkeiten sind sämtlich als in einem Euklidischen Zahlenraum liegend vorausgesetzt. Dies bedeutet wegen des MENGER-NÖBELINGschen Einbettungssatzes keine Einschränkung gegenüber dem Fall beliebiger kompakter topologischer Mannigfaltigkeiten.

Der über die HOPFsche Spurformel führende Beweis läßt sich ohne Schwierigkeiten von endlichen simplizial zerlegbaren Mannigfaltigkeiten auf endliche homogene Polyeder und von den letzteren auf beliebige endliche Polyeder[1]) ausdehnen. Hingegen erfordert eine Verallgemeinerung des hier gegebenen Beweises auf beliebige endliche Polyeder Zusätze, die die Überlegungen wesentlich verschärfen.

## 1. Ein Satz im Kleinen.

Der in diesem Abschnitt herzuleitende Satz enthält, obschon sein Inhalt durch keinen überraschenden oder einprägsamen Sachverhalt ins Auge springt,

[1]) WECKEN, F.: Fixpunktklassen. I. Math. Ann. **117**, 659—671 (1941).

bereits wesentliche Stücke aus dem unten geführten Invarianzbeweis für die algebraische Fixpunktzahl.

Zunächst einige Bemerkungen zur Bezeichnungsweise. Ist jedem Punkt $p$ einer Menge genau ein Punkt $f(p)$ einer anderen Menge zugeordnet, so bedeutet $f(p)$ stets den Punkt, während die ganze Zuordnungsvorschrift mit $f$, nirgends mit $f(p)$ bezeichnet wird. In einem Euklidischen Zahlenraum gelegene Simplexe sind stets offen und gradlinig gemeint. Eine in einem Euklidischen Zahlenraum liegende topologische Mannigfaltigkeit ist eine Menge $P$ dieses Raumes derart, daß eine natürliche Zahl $r$ und zu jedem Punkt $p$ von $P$ eine in $P$ offene zum $R^r$ homöomorphe Menge $\ni p$ existiert. Sind $a=(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ und $b=(\beta_1, \ldots, \beta_r)$ Punkte des $r$-dimensionalen Euklidischen Zahlenraumes $R^r$, so bedeutet $a+b$ den Punkt $(\alpha_1+\beta_1, \ldots, \alpha_r+\beta_r)$ und $\varrho(a, b)$ die Entfernung der Punkte $a, b$.

Ist $r$ eine natürliche Zahl, $U$ eine offene $r$-dimensionale Vollkugel im $R^r$, ferner $q$ ein Punkt aus $U$ und $f$ eine affine Abbildung von $\overline{U}$ in den $R^r$ mit $q$ als einzigem Fixpunkt, so ist die durch $f'(p)=f(p)-p$, $p\in\overline{U}$, bestimmte Abbildung $f'$ von $\overline{U}$ in den $R^r$ nicht ausgeartet affin. Je nachdem $f'$ positiv oder negativ, heißt $+1$ oder $-1$ der „*Index*" von $q$ bei $f$. Wir bezeichnen $q$ als einen „*affinen*" Fixpunkt von $f$.

Die Bedeutung von $r$, $U$ und $q$ sei die gleiche wie im letzten Absatz. Ist $f$ eine beliebige stetige Abbildung von $\overline{U}$ in den $R^r$ mit $q$ als einzigem Fixpunkt, so kann man den „*Index*" von $q$ bei $f$ wie folgt erklären. Es sei $f'$ eine stetige Abbildung von $\overline{U}$ in den $R^r$ mit $f'(p)=f(p)$, $p\in\overline{U}-V$, und den Eigenschaften: $f'$ hat nur endlich viele Fixpunkte; zu jedem Fixpunkt $a$ von $f'$ existiert eine offene $r$-dimensionale Vollkugel $V_a$, so daß $a\in V_a\subset V$ und $f'$ auf $V_a$ affin ist. Dann heißt die Summe der Indizes der Fixpunkte von $f'$ der „*Index*" von $q$ bei $f$.

Die vorstehende Erklärung des Fixpunktindexes ist, wie aus bekannten Sätzen folgt, eindeutig. Es gilt also, wobei wieder $r$ eine natürliche Zahl und $V$ eine offene $r$-dimensionale Vollkugel im $R^r$ bezeichnet, der folgende

spezielle Eindeutigkeitssatz. *Bedeuten $g$ und $h$ stetige Abbildungen von $\overline{U}$ in den $R^r$ mit $p\neq g(p)=h(p)$, $p\in\overline{U}-V$, und der Eigenschaft, daß jeder Fixpunkt von $g$ und ebenso jeder solche von $h$ affin, so sind die Summe der Indizes der Fixpunkte von $g$ und diejenige von $h$ gleich.*

Wie bekannt, ist der Index topologisch invariant und daher, wenn $f$ eine stetige Abbildung einer topologischen Mannigfaltigkeit in sich mit höchstens endlich vielen Fixpunkten bedeutet, in jedem Fixpunkt von $f$ der „*Index*" erklärt. Als „*Indexsumme*" von $f$ bezeichnen wir, wenn $f$ keinen Fixpunkt hat, die Zahl 0, sonst die Summe der Indexe der Fixpunkte von $f$.

Wir beginnen unsere weiteren Überlegungen mit einem

Hilfssatz. *Es seien $r$ eine natürliche Zahl, $S$ ein Simplex einer Dimension $<r$ im $R^r$, $K$ der aus dem Simplex $S$ und seinen Seiten bestehende Komplex, weiter $S_1, \ldots, S_m$ Simplexe $\neq S$ von $K$, $V$ und $X$ beschränkte offene Mengen mit*

$$\overline{S}-(\overline{S}_1+\cdots+\overline{S}_m)\subset V \quad \text{und} \quad \overline{S}_1+\cdots+\overline{S}_m\subset X,$$

*ferner $g$ und $h$ stetige Abbildungen von $\overline{V}$ in den $R^r$ mit höchstens endlich vielen Fixpunkten und*

$$p \neq g(p) = h(p) \quad \text{für} \quad p \in \overline{X} \cdot \overline{V}.$$

*Dann gibt es eine $\overline{S}$ enthaltende offene Menge $Y$ und stetige Abbildungen $g'$, $h'$ von $\overline{V}$ in den $R^r$ mit höchstens endlich vielen Fixpunkten und den weiteren Eigenschaften:*

$$g'(p) = g(p) \quad \text{und} \quad h'(p) = h(p) \quad \text{für} \quad p \in \overline{V} - V;$$
$$p \neq g'(p) = h'(p) \quad \text{für} \quad p \in \overline{Y} \cdot \overline{V};$$

*die Indexsummen von $g$ und $g'$, ebenso die von $h$ und $h'$ sind gleich.*

Beweis. Ist $q$ ein auf $\overline{S}$ gelegener Fixpunkt von $g$, so ist $q \notin \overline{X}$, und daher gibt es eine Zahl $\varepsilon > 0$ derart, daß alle Punkte $p$ des $R^r$ mit $\varrho(p, q) < \varepsilon$ in $V$ liegen und zu $\overline{X}$ fremd sind.

Durch eine kleine Verschiebung der auf $\overline{S}$ liegenden Fixpunkte von $g$ kann man daher eine Abbildung $g'$ von $\overline{V}$ in den $R^r$ gewinnen, über die gilt: es hat $g'$ höchstens endliche viele Fixpunkte;

$$g'(p) = g(p) \quad \text{für} \quad p \in (\overline{V} - V) + \overline{X} \cdot \overline{V};$$

auf $\overline{S}$ befindet sich kein Fixpunkt von $g'$; die Indexsummen von $g$ und $g'$ stimmen überein.

Da $\overline{S - X}$ in $V$ liegt und $S$ eine Dimension $< r$ hat, gibt es ein $r$-dimensionales Simplex $U$ derart, daß

$$\overline{S - X} < U, \quad \overline{U} < V \quad \text{und} \quad p \neq h(p) \quad \text{für} \quad p \in \overline{U} - U.$$

Es bedeute $T$ eine offene Menge, so daß $\overline{S - X} < T$, $\overline{T} < U$ und $p \neq g'(p)$ für $p \in \overline{T}$. Dann sei

$$h'(p) = h(p) \quad \text{für} \quad p \in (\overline{V} - U) + \overline{X} \cdot \overline{U}, \quad h'(p) = g'(p) \quad \text{für} \quad p \in \overline{T}.$$

Zum Beweis, daß $h'$ auf $(\overline{V} - U) + \overline{X} \cdot \overline{U} + \overline{T}$ stetig, genügt es, die Stetigkeit von $h'$ auf $((\overline{V} - U) + \overline{X} \cdot \overline{U}) \cdot \overline{T}$ und wegen $\overline{T} < U$ also auf $\overline{X} \cdot \overline{U} \cdot \overline{T}$ zu prüfen: Wenn $q$ ein Punkt der letzteren Menge, so ist $g'(q) = g(q)$, nach Voraussetzung weiter $g(q) = h(q)$, daher $h(q) = g'(q)$.

Jetzt ist noch die Abbildung $h'$ über $U - (\overline{X} + \overline{T})$ stetig und mit höchstens endlich vielen Fixpunkten fortzusetzen. Dies ist aber, da $p \neq h'(p)$ für alle Punkte $p$ aus $(\overline{U} - U) + (\overline{X} + \overline{T}) \cdot \overline{U}$, leicht möglich.

Wegen $p \neq h'(p) = h(p)$, $p \in \overline{U} - U$, und dem oben angegebenen speziellen Eindeutigkeitssatz sind die Indexsummen von $h$ und $h'$ auf $U$ gleich. Mithin sind weiter, da $h'(p) = h(p)$ für $p \in \overline{V} - U$, die Indexsummen von $h$ und $h'$ gleich. — In jedem Punkt $p$ von $\overline{Y} \cdot \overline{V}$, wobei $Y = X + T$, ist $p \neq g'(p) = h'(p)$.

Hier schließt der Beweis des Hilfssatzes. Wir können nun zeigen:

Satz im Kleinen. *Es seien $r$ eine natürliche Zahl und $U$ eine beschränkte offene Menge im $R^r$, $M$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\overline{U} - U$, $W$ und $X$ beschränkte offene Mengen im $R^r$ mit*

$$\overline{U} - M < W \quad \text{und} \quad M < X;$$

*ferner $g$ und $h$ stetige Abbildungen von $\overline{W}$ in den $R^r$ mit höchstens endlich vielen Fixpunkten und*

$$p \neq g(p) = h(p) \quad \text{für} \quad p \in \overline{X} \cdot \overline{W}.$$

*Dann gibt es offene Mengen $V$ und $Y$ mit*

$$U \subset V, \quad \overline{V} - M \subset W, \quad \overline{V} - V \subset Y$$

*sowie stetige Abbildungen $g'$ und $h'$ von $\overline{W}$ in den $R^r$ mit höchstens endlich vielen Fixpunkten und den Eigenschaften:*

$$g'(p) = g(p) \quad \text{und} \quad h'(p) = h(p) \quad \text{für} \quad p \in \overline{W} - W;$$
$$p \neq g'(p) = h'(p) \quad \text{für} \quad p \in \overline{Y} \cdot \overline{W};$$

*auf $V$ stimmen die Indexsummen von $g'$ und $h'$ überein; die Indexsummen von $g$ und $g'$, ebenso die von $h$ und $h'$ stimmen überein.*

Beweis. Da $M$ kompakt und $X$ eine offene Menge $\supset M$ ist, existiert eine Zahl $\varepsilon > 0$, so daß die $2\varepsilon$-Umgebung von $M$, die wir $Z$ nennen, in $X$ liegt. Die $\varepsilon$-Umgebung von $M$ nennen wir $Z_1$.

Da $\overline{U} - Z_1$ eine kompakte in $W$ liegende Menge, gibt es, wenn $K$ eine hinreichend feine simpliziale Zerlegung des $R^r$ bedeutet, in $K$ endlich viele Grundsimplexe $U_i$ mit den Eigenschaften: die Durchmesser der $U_i$ sind sämtlich $< \varepsilon$; bezeichnet $T$ das Innere des Polyeders $\sum \overline{U}_i$, so ist

$$\overline{U} - Z_1 \subset T \quad \text{und} \quad \overline{T} \subset W. \tag{1}$$

Wir bezeichnen den Komplex aller in $\overline{T}$ liegenden Simplexe von $K$ mit $L$; mit $S_{0i}$, $i = 1, \ldots, m_0$, diejenigen $(r-1)$-dimensionalen Simplexe von $L$, die zu $Z_1$ nicht fremd; mit $S_i$, $i = 1, \ldots, m$, die übrigen $(r-1)$-dimensionalen Simplexe von $L$.

Für $i = 1, \ldots, m$ ist

$$S_i \cdot (\overline{U} - T) = 0. \tag{2}$$

Wäre nämlich (2) für das Simplex $S_i$ nicht richtig, so läge $S_i$ in $\overline{T} - T$, und es gäbe einen Punkt $q$ aus $S_i \cdot (\overline{U} - T)$. Wegen $q \in S_i$ und der Bedeutung von $S_i$ wäre $q \notin Z_1$; wegen $q \in \overline{U}$, $q \notin Z_1$ und (1) also $q \in T$; ein Widerspruch.

Nach (1) ist $\overline{U} - T \subset Z_1$, wegen $Z_1 \subset X$ also $\overline{U} - T \subset X$. Da $\varrho(S_{0i}, M) < \varepsilon$ und der Durchmesser von $S_{0i}$ kleiner als $\varepsilon$, ist $S_{0i}$ in $Z$, also in $X$ gelegen. Mithin

$$(\overline{U} - T) + \sum \overline{S}_{0i} \subset X. \tag{3}$$

Wir bezeichnen mit $S_0$ die leere Menge, mit $j$ eine der Zahlen $0, \ldots, m-1$, die kompakte Menge $(\overline{U} - T) + \sum \overline{S}_{0i} + \overline{S}_0 + \cdots + \overline{S}_j$ mit $T_j$ und machen die Annahme: es gibt eine $T_j$ enthaltende offene Menge $X_j$ und stetige Abbildungen $g_j$, $h_j$ von $\overline{W}$ in den $R^r$ mit höchstens endlich vielen Fixpunkten und den weiteren Eigenschaften $\mathrm{I}_j$ bis $\mathrm{III}_j$.

$I_j$. Für $p \in \overline{W} - W$ ist $g_j(p) = g(p)$ und $h_j(p) = h(p)$.

$II_j$. Es ist $p \neq g_j(p) = h_j(p)$ für $p \in \overline{X}_j \cdot \overline{W}$.

$III_j$. Die Indexsummen der Abbildungen $g_j$ und $g$ stimmen überein, ebenso die der Abbildungen $h_j$ und $h$.

Dann bedeute $V_0$ eine offene Menge im $R^r$ derart, daß sich auf der Begrenzung $\overline{V}_0 - V_0$ von $V_0$ kein Fixpunkt der Abbildung $g_j$ und ebenso kein solcher der Abbildung $h_j$ befindet sowie

$$\overline{S}_{j+1} - T_j \subset V_0 \subset W \quad \text{und} \quad \overline{S}_{j+1} \cdot T_j = \overline{V}_0 \cdot T_j \tag{4}$$

ist. Eine solche Menge existiert. Denn es sind $\overline{S}_{j-1}$ und $T_j$ kompakte Mengen, und wegen (2) ist jeder Punkt der Menge $\overline{S}_{j-1} \cdot T_j$ Häufungspunkt der Menge $\overline{S}_{j+1} - T_j$. Hieraus folgt, wie im nächsten Absatz erläutert wird, leicht die Existenz von $V_0$.

Wir bezeichnen für jeden Punkt $p$ aus $\overline{S}_{j-1} - T_j$ mit $\varepsilon_p$ die positive Zahl $\varrho(p, T_j)$ und mit $U_p$ die $\varepsilon_p/2$-Umgebung von $p$; weiter die Menge $\sum U_p \cdot W$, $p \in \overline{S}_{j+1} - T_j$, mit $V_0'$. Dann gilt (4), wenn man darin $V_0$ durch $V_0'$ ersetzt. Da sich ferner auf $T_j$ kein Fixpunkt von $g_j$ und kein solcher von $h_j$ befindet, gibt es eine Teilmenge $V_0^*$ von $V_0'$ derart, daß $V_0' - V_0^*$ eine Menge $V_0$ der verlangten Art.

Wegen $T_j \subset X_j$ und $II_j$ ist $\overline{S}_{j-1} \cdot T_j \subset X_j$ und $p \neq g_j(p) = h_j(p)$ für die Punkte $p$ aus $\overline{X}_j \cdot \overline{V}_0$. Eine Anwendung des obigen Hilfssatzes liefert dann eine offene Menge $Y \supset \overline{S}_{j-1}$ sowie stetige Abbildungen $g_{j-1}$ und $h_{j-1}$ von $\overline{W}$ in den $R^r$ mit höchstens endlich vielen Fixpunkten und den Eigenschaften:

$$g_{j+1}(p) = g_j(p) \quad \text{und} \quad h_{j+1}(p) = h_j(p) \qquad \text{für } p \in \overline{W} - V_0; \tag{5}$$

$$p \neq g_{j+1}(p) = h_{j+1}(p) \quad \text{für } p \in \overline{Y} \cdot \overline{V}_0; \tag{6}$$

die Indexsummen von $g_j$ und $g_{j+1}$, ebenso die von $h_j$ und $h_{j+1}$ stimmen überein.

Aus $I_j$ und (5) folgt $I_{j+1}$. Es folgt $III_{j+1}$ aus $III_j$ und der Erklärung der Abbildungen $g_{j+1}$ und $h_{j+1}$.

Zur Bestätigung von $II_{j+1}$ genügt, wenn $q$ einen Punkt der Menge $T_j + \overline{S}_{j+1}$ bedeutet, der Nachweis: es gibt eine offene Menge $\ni q$ derart, daß

$$p \neq g_{j+1}(p) = h_{j+1}(p) \tag{*}$$

in allen Punkten $p$ dieser Menge. *Erstens* sei $q \notin V_0'$. Dann ist $q \in T_j$ und $\varrho(q, V_0) > 0$, daher die Behauptung wegen $II_j$ richtig. Wenn *zweitens* $q \in V_0$, so ist $q \in \overline{S}_{j+1} - T_j$ wegen (4), daher $q \in Y$, also $q \in Y \cdot V_0$, mithin die Behauptung wegen (6) richtig. Ist *drittens* $q$ ein Punkt aus $V_0' - V_0$, so liegt $q$ wegen (4) in $\overline{S}_{j+1} \cdot T_j$. Es liegt $q$ wegen $q \in \overline{S}_{j-1}$ in $Y$, wegen $q \in T_j$ in $X_j$, also in $X_j \cdot Y$. Bedeutet dann $p$ einen Punkt aus $X_j \cdot Y \cdot W - V_0$, so ist $g_{j+1}(p) = g_j(p)$ und $h_{j+1}(p) = h_j(p)$, daher (*) wegen $p \in X_j \cdot W$ und $II_j$ richtig. Ist $p$ in $X_j \cdot Y \cdot W \cdot V_0$ gelegen, so folgt (*) aus $p \in Y \cdot V_0$ und (6). Mithin ist $X_j \cdot Y \cdot W$ eine Menge $\ni q$ der verlangten Art.

Wegen (3) ist unsere Annahme für $j = 0$, $g_0 = g$, $h_0 = h$ und $X_0 = X$ richtig. Daher gibt es stetige Abbildungen $g_m$ und $h_m$ von $\overline{W}$ in den $R^r$, über die $I_m$ bis $III_m$ gilt.

Dann haben $V = T + U$, $Y = X_m$, $g' = g_m$ und $h' = h_m$ die geforderten Eigenschaften:

Es ist $\overline{V} - M \subset \overline{T} + (\overline{U} - M)$. Nach (1) ist $\overline{T} \subset W$, ferner $\overline{U} - M \subset W$ nach Voraussetzung, also $\overline{V} - M$ in $W$ gelegen. — Wegen $\overline{V} - V \subset (\overline{T} - T) + (\overline{U} - U)$, $\overline{T} - T \subset \sum \overline{S}_{0i} + \sum \overline{S}_i$ und $T \subset V$ ist $\overline{V} - V \subset \sum \overline{S}_{0i} + \sum \overline{S}_i + (\overline{U} - T)$, daher $\overline{V} - V \subset Y$.

Auf $V$ stimmen die Indexsummen von $g'$ und $h'$ überein, da $p \neq g'(p) = h'(p)$ in den Punkten $p$ von $U - T$; die Übereinstimmung der Indexsummen von $g'$ und $h'$ auf $T$ folgt aus $p \neq g'(p) = h'(p)$, $p \in \sum \overline{S}_{0i} + \sum \overline{S}_i$, und dem oben angeführten speziellen Eindeutigkeitssatz.

Damit ist der Beweis beendet.

Es folgen zwei Bemerkungen.

Bemerkung 1. *Sind $P$ eine $r$-dimensionale kompakte topologische Mannigfaltigkeit, $r > 0$, in einem Euklidischen Zahlenraum und $n$ eine natürliche Zahl, so existieren Zahlen $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ mit $0 < \alpha_i < \alpha_{i+1}$, $i = 0, \ldots, n-1$, und der folgenden für $i = 0, \ldots, n-1$ geltenden Eigenschaft: jede Menge aus $P$, die einen Durchmesser $< \frac{1}{3}\alpha_i$ hat, ist in einer Menge aus $P$, die zum $R^r$ homöomorph ist und einen Durchmesser $< \alpha_{i+1}$ hat, gelegen.*

Beweis. Es sei erstens $\alpha_n$ der Durchmesser von $P$. Da $P$ kompakt, gibt es in $P$ offene zum $R^r$ homöomorphe Mengen $U_i^n$, $i = 1, \ldots, m^n$, mit $\sum U_i^n = P$. Hierauf existiert eine Zahl $\alpha_{n-1}$ mit $0 < \alpha_{n-1} < \alpha_n$ derart, daß jede Menge aus $P$, deren Durchmesser $< \frac{1}{3}\alpha_{n-1}$ ist, in mindestens einer der Mengen $U_i^n$, $i = 1, \ldots, m^n$, liegt.

Zweitens seien $U_i^{n-1}$, $i = 1, \ldots, m^{n-1}$, in $P$ offene zum $R^r$ homöomorphe Mengen, deren jede einen Durchmesser $< \alpha_{n-1}$ hat, mit $\sum U_i^{n-1} = P$. Dann gibt es eine Zahl $\alpha_{n-2}$ mit $0 < \alpha_{n-2} < \alpha_{n-1}$ so beschaffen, daß jede Menge aus $P$, deren Durchmesser $< \frac{1}{3}\alpha_{n-2}$ ist, in mindestens einer der Mengen $U_i^{n-1}$, $i = 1, \ldots, m^{n-1}$, liegt.

So fortfahrend bestätigt man Bemerkung 1.

Bemerkung 2. *Sind $M$ eine beschränkte Teilmenge im $R^n$, $n > 0$, und $\varepsilon$ eine positive Zahl, so gibt es offene Mengen $S_i^k$, $i = 1, \ldots, m^k$, $k = 0, \ldots, n$, im $R^n$ mit den Eigenschaften: es ist $M \subset \sum\sum S_i^k$; der Durchmesser eines jeden $S_i^k$ ist $< \varepsilon$; für alle $(i_1, i_2, k)$ mit $i_1 \neq i_2$ sind $\overline{S}_{i_1}^k$ und $\overline{S}_{i_2}^k$ zueinander fremd.*

Beweis. Es seien $P$ ein $n$-dimensionales endliches Polyeder $\supset M$ und $K$ eine simpliziale Zerlegung von $P$ mit Simplexdurchmessern $< \varepsilon$; ferner $T_i^k$, $i = 1, \ldots, m^k$, für $k = 0, \ldots, n$ die $k$-dimensionalen Simplexe von $K$.

Wir bezeichnen mit $j$ eine der Zahlen $0, \ldots, n-1$ und machen die folgende Annahme, die, wie man sich leicht überlegt, für $j = 0$ richtig ist. Es sind $S_i^k$, $i = 1, \ldots, m^k$, $k = 0, \ldots, j$, offene Mengen im $R^r$ mit $\sum \overline{T}_i^j \subset \sum S_i^0 + \cdots + \sum S_i^j$ und den folgenden für $k = 0, \ldots, j$ geltenden Eigenschaften: für $i = 1, \ldots, m^k$ ist der Durchmesser von $S_i^k$ kleiner als $\varepsilon$; die abgeschlossenen Mengen $\overline{S}_i^k$, $i = 1, \ldots, m^k$, sind paarweis zueinander fremd.

Dann existieren $(j+1)$-dimensionale Simplexe $U_i^{j+1}$, $i=1,\ldots,m^{j+1}$, derart, daß

(*) $$\overline{U}_i^{j+1} \subset T_i^{j+1} \quad \text{und} \quad \overline{T}_i^{j+1} - U_i^{j+1} \subset \sum S_i^0 + \cdots + \sum S_i^j.$$

Da die $\overline{U}_i^{j+1}$, $i=1,\ldots,m^{j+1}$, paarweis zueinander fremd, kompakt und von einem Durchmesser $<\varepsilon$ sind, gibt es offene Mengen $S_i^{j+1}$, $i=1,\ldots,m^{j+1}$, mit den Eigenschaften: der Durchmesser eines jeden $S_i^{j+1}$ ist $<\varepsilon$; es ist $\overline{U}_i^{j+1}$ in $S_i^{j+1}$ gelegen; die $\overline{S}_i^{j+1}$, $i=1,\ldots,m^{j+1}$, sind paarweis zueinander fremd.

Wegen (*) ist $\sum \overline{T}_i^{j+1} \subset \sum S_i^0 + \cdots + \sum S_i^{j+1}$; wenn $j=n-1$, also $M \subset P = \sum \overline{T}_i^n \subset \sum\sum S_i^k$, womit die Bemerkung bewiesen.

## 2. Eindeutigkeit der algebraischen Fixpunktzahl.

Bis zum Ende dieses Abschnitts seien $r$ und $n$ natürliche Zahlen, $P$ eine $r$-dimensionale kompakte topologische Mannigfaltigkeit in dem $n$-dimensionalen Euklidischen Zahlenraum $R^n$, $f$ eine stetige Abbildung von $P$ in sich, $Q$ die Menge der Fixpunkte von $f$.

Ist $\alpha_0$ eine hinreichend kleine positive Zahl, so existieren nach Bemerkung 1 Zahlen $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ mit $0<\alpha_i<\alpha_{i+1}$, $i=0,\ldots,n-1$, und der Eigenschaft: für $i=0,\ldots,n-1$ liegt jede Teilmenge von $P$, die einen Durchmesser $<3\alpha_i$ hat, in einer in $P$ offenen Menge, die zum $R^r$ homöomorph ist und einen Durchmesser $<\alpha_{i+1}$ hat. — Dann bezeichne bis zum Ende des Abschnittes $\alpha$ die obere Grenze der Zahlen $\alpha_0$.

Definition. *Wenn die Abbildung $f$ keinen Fixpunkt hat, ist ihre „algebraische Fixpunktzahl" Null. Sonst sei $U$ eine in $P$ offene Menge mit $\varrho(p,f(p))<\alpha$, $p\in\overline{U}$, und $Q\subset U$; ferner $f'$ eine stetige Abbildung von $P$ in sich mit*

$$f'(p)=f(p), \quad p\in P-U, \quad \text{sowie} \quad \varrho(p,f'(p))<\alpha, \quad p\in U,$$

*und höchstens endlich vielen Fixpunkten. Dann heißt die Indexsumme von $f'$ die „algebraische Fixpunktzahl" von $f$.*

Zum Zweck, die vorstehende Erklärung als eindeutig nachzuweisen, seien $U^1$, $U^2$ in $P$ offene Mengen und $f^1$, $f^2$ stetige Abbildungen von $P$ in sich mit den folgenden für $i=1,2$ geltenden Eigenschaften; es ist $Q\in U^i$ und $\varrho(p,f(p))<\alpha$ für $p\in\overline{U}^i$, ferner

$$f^i(p)=f(p) \quad \text{für} \quad p\in P-U^i, \qquad \varrho(p,f^i(p))<\alpha \quad \text{für} \quad p\in\overline{U}^i,$$

und die Abbildung $f^i$ hat höchstens endlich viele Fixpunkte.

Dann sind $U^1+U^2$ eine in $P$ offene Menge $U$ und $f^1$, $f^2$ stetige Abbildungen von $P$ in sich, über die gilt: $Q\subset U$ und $\varrho(p,f(p))<\alpha$ für $p\in\overline{U}$; für $p\in P-U$ ist $f^i(p)=f(p)$; für $p\in\overline{U}$ ist $\varrho(p,f^i(p))<\alpha$. Die Übereinstimmung der Indexsummen von $f^1$ und $f^2$ ergibt sich daher aus folgendem

Eindeutigkeitssatz. *Es seien $U$ eine in $P$ offene Menge und $g$, $h$ stetige Abbildungen von $P$ in sich mit höchstens endlich vielen Fixpunkten und den weiteren Eigenschaften:*

$$p\neq g(p)=h(p) \quad \text{für} \quad p\in P-U;$$

*für $p \in \overline{U}$ ist $\varrho(p, g(p)) < \alpha$ und $\varrho(p, h(p)) < \alpha$. Dann stimmen die Indexsummen von $g$ und $h$ überein.*

Beweis. Wegen der Kompaktheit von $\overline{U}$ und der Bedeutung von $\alpha$ gibt es Zahlen $\alpha^0, \ldots, \alpha^n$ mit $0 < \alpha^0 \leqq \alpha$, $\alpha^k < \alpha^{k+1}$, $k = 0, \ldots, n-1$, und den Eigenschaften: es ist sogar

$$\varrho(p, g(p)) < \alpha^0 \quad \text{und} \quad \varrho(p, h(p)) < \alpha^0 \quad \text{für} \quad p \in \overline{U}; \tag{1}$$

für $k = 0, \ldots, n-1$ ist jede Teilmenge von $P$, deren Durchmesser $< 3\alpha^k$, in einer in $P$ offenen Menge, die zum $R^r$ homöomorph ist und einen Durchmesser $< \alpha^{k+1}$ hat, gelegen. Statt $\alpha^0$ schreiben wir auch $\alpha^{-1}$.

Weiter existiert wegen (1) und der Kompaktheit von $\overline{U}$ eine in $P$ offene Menge $U'$ mit $\overline{U} \subset U'$ und der Eigenschaft, daß $\varrho(p, g(p)) < \alpha^0$ und $\varrho(p, h(p)) < \alpha^0$ sogar für $p \in \overline{U}'$.

Wegen Bemerkung 2 gibt es in $P$ offene Mengen $S_i^k$, $i = 1, \ldots, m^k$, $k = 0, \ldots, n$, mit $\sum \sum S_i^k = U'$ und den Eigenschaften: für $i_1 \neq i_2$ sind $\overline{S}_{i_1}^k$ und $\overline{S}_{i_2}^k$ zueinander fremd; der Durchmesser von $S_i^k$ ist $< \alpha^0$. Wir bezeichnen die leere Menge mit $S_1^{-1}$ und mit $j$ eine der Zahlen $-1, 0, \ldots, n-1$.

Unter der Voraussetzung, es seien $U^j$ eine in $P$ offene Menge mit $U^j + \sum S_i^{j+1} + \cdots + \sum S_i^n = U'$, ferner $g^j$ und $h^j$ stetige Abbildungen von $P$ in sich mit höchstens endlich vielen Fixpunkten und den Eigenschaften $\mathrm{I}^j$ bis $\mathrm{III}^j$, wollen wir die Existenz einer in $P$ offenen Menge $U^{j+1}$ mit $U^{j+1} + \sum S_i^{j+2} + \cdots + \sum S_i^n = U'$, ferner stetiger Abbildungen $g^{j+1}$, $h^{j+1}$ von $P$ in sich mit höchstens endlich vielen Fixpunkten und den Eigenschaften $\mathrm{I}^{j+1}$ bis $\mathrm{III}^{j+1}$ nachweisen.

$\mathrm{I}^j$. Die Indexsumme von $g^j$ auf $U'$ stimmt mit der von $g$ auf $U'$ überein, ebenso diejenige von $h^j$ auf $U'$ mit der von $h$ auf $U'$.

$\mathrm{II}^j$. Es existiert eine Zahl $\varepsilon > 0$ derart, daß $p \neq g^j(p) = h^j(p)$ in allen Punkten $p$ aus $P$, deren Entfernung von $(\overline{U}' - U') + (\overline{U}^j - U^j)$ kleiner als $\varepsilon$ ist. Auf $U^j$ haben $g^j$ und $h^j$ die gleiche Indexsumme.

$\mathrm{III}^j$. Für $p \in \overline{U}'$ ist $\varrho(p, g^j(p)) < \alpha^j$ und $\varrho(p, h^j(p)) < \alpha^j$.

Wir bezeichnen mit $\delta > 0$ eine Zahl, von der gilt: für $i_1 \neq i_2$ sind die Mengen $S_{i_1}^{j+1}$ und $S_{i_2}^{j+1}$ um mehr als $2\delta$ voneinander entfernt; für $i = 1, \ldots, m^{j+1}$ hat die Menge aller Punkte $p$ aus $P$ mit $\varrho(p, S_i^{j+1}) < \delta$ einen Durchmesser $< \alpha^0$.

Es bedeute $l$ eine der Zahlen $1, \ldots, m^{j+1}$.

Statt $S_l^{j+1}$ schreiben wir auch $S$, statt $S - \overline{U}^j$ auch $T$. Wir bezeichnen mit $M$ die Menge $(\overline{T} - T) \cdot \left((\overline{U}' - U') + (\overline{U}^j - U^j)\right)$.

Dann existieren, wie wir im nächsten Absatz zeigen, in $P$ offene Mengen $W$ und $Z$ mit den Eigenschaften:

$$\overline{W} + g^j(\overline{W}) + h^j(\overline{W}) \subset Z; \tag{2}$$

$$\overline{T} - M \subset W \subset U' - \overline{U}^j, \quad \overline{W} - W \subset (U' - \overline{U}^j) + M; \tag{3}$$

$$p \neq g^j(p) \quad \text{und} \quad p \neq h^j(p) \quad \text{für} \quad p \in \overline{W} - W; \tag{4}$$

es liegt $\overline{W}$ in der $\delta$-Umgebung von $S$; der Durchmesser von $Z$ ist $< \alpha^{j+1}$; man kann $Z$ topologisch auf den $R^r$ abbilden.

Wegen $\mathrm{III}^j$ ist der Durchmesser von $\overline{T}+g^j(\overline{T})+h^j(\overline{T})$ kleiner als $3\alpha^j$. Daher existiert eine in $P$ offene zum $R^r$ homöomorphe Menge $Z$ mit $\overline{T}+g^j(\overline{T})+h^j(\overline{T})\subset Z$ und einem Durchmesser $<\alpha^{j+1}$. Dann sei $B$ die Begrenzung der offenen Menge $U'-\overline{U}^j$, ferner $\delta_p$ für jeden Punkt $p$ aus $\overline{T}-M$ die Zahl $\varrho(p, B)/2$ und $U_p$ die Menge aller Punkte $p'$ aus $U'-\overline{U}^j$ mit $\varrho(p, p')<\delta_p$. Bezeichnen wir hierauf die Menge $\sum U_p$, $p\in\overline{T}-M$, mit $W^0$, so gilt (3), wenn man darin $W$ durch $W^0$ ersetzt. Und mit Hilfe von $W^0$ findet man leicht $W$.

Nach dem in Abschnitt 1 hergeleiteten Satz im Kleinen gibt es in $P$ offene Mengen $V$ und $Y$ mit

$$T\subset V,\quad \overline{V}-M\subset W,\quad \overline{V}-V\subset Y \tag{5}$$

sowie stetige Abbildungen $g'$ und $h'$ von $\overline{W}$ in $Z$ mit höchstens endlich vielen Fixpunkten und den Eigenschaften:

$$g'(p)=g^j(p)\quad\text{und}\quad h'(p)=h^j(p)\quad\text{für}\quad p\in\overline{W}-W; \tag{6}$$

$$p\neq g'(p)=h'(p)\quad\text{für}\quad p\in\overline{Y}\cdot\overline{W}; \tag{7}$$

auf $V$ stimmen die Indexsummen von $g'$ und $h'$ überein; auf $W$ stimmen $g'$ und $g^j$, ebenso $h'$ und $h^j$ in ihren Indexsummen überein.

Hierauf sei $g^{j+1}(p)=g^j(p)$ und $h^{j+1}(p)=h^j(p)$ für $p\in P-\sum W_i^{j+1}$, ferner

$$g^{j+1}(p)=g'(p)\quad\text{und}\quad h^{j+1}(p)=h'(p)\quad\text{für}\quad p\in\overline{W}. \tag{8}$$

Die so erklärten Abbildungen $g^{j+1}$ und $h^{j+1}$ sind wegen (6) stetig.

Zum Beweis, daß die Menge

$$U^{j+1}=U^j+\sum V_i^{j+1}+(\overline{U}^j-U^j)\cdot\sum S_i^{j+1} \tag{9}$$

in $P$ offen ist, genügt es, da $U^j$ und $V$ in $P$ offen, zu zeigen, daß die Menge $(\overline{U}^j-U^j)\cdot S$ in einer bezüglich $P$ offenen Teilmenge von $U^{j+1}$ liegt: Die Menge $U^j+(S-\overline{U}^j)+(\overline{U}^j-U^j)\cdot S$ ist wegen $S-\overline{U}^j=T\subset V$ Teilmenge von $U^{j+1}$ und gleich

$$U^j+(S-(\overline{U}^j-U^j)\cdot S)+(\overline{U}^j-U^j)\cdot S=U^j+S,$$

also in $P$ offen.

Wir wollen zeigen:

$\mathrm{II}_i^{j+1}$. Es ist $p\neq g^{j-1}(p)=h^{j-1}(p)$ für alle Punkte $p$ einer Menge, die $(\overline{U}'-U')+(\overline{U}^{j+1}-U^{j+1})$ enthält und in $P$ offen ist.

Beweis von $\mathrm{II}_1^{j+1}$. Da $U^{j+1}$ in $P$ offen und keine in $P$ offene Menge Teilmenge von $\overline{U}^j-U^j$ ist, folgt aus (9), daß

$$\overline{U}^{j+1}-U^{j+1}\subset(\overline{U}^j-U^j)+\sum(\overline{V}_i^{j+1}-V_i^{j+1}). \tag{*}$$

Zum Beweis von $\mathrm{II}_i^{j+1}$ genügt es zu zeigen: zu jedem Punkt $q$ aus $(\overline{U}'-U')+(\overline{U}^j-U^j)+\sum(\overline{V}_i^{j-1}-V_i^{j-1})$ gibt es eine in $P$ offene Menge $\ni q$ derart, daß

$$p\neq g^{j+1}(p)=h^{j+1}(p) \tag{*}$$

in allen Punkten $p$ dieser Menge. Der Fall, daß $q \in \overline{W} - \overline{V}$, ist nicht möglich. Denn dann wäre $q$ in $(\overline{U}' - U') + (\overline{U}^j - U^j)$ gelegen, wegen (3) weiter in $M$, daher in $\overline{V}$: ein Widerspruch. Ist nun *erstens* $q$ zu $\sum \overline{W}_i^{j+1}$ fremd, so folgt aus $\mathrm{II}^j$ die Behauptung. Wenn *zweitens* $q$ in $(\overline{V} - V) - M$ liegt, so ist $q \in Y \cdot W$, also die Behauptung wegen (7) richtig. *Drittens* sei $q \in M$. Dann gibt es, da $M$ Teilmenge von $(\overline{U}' - U') + (\overline{U}^j - U^j)$ ist, eine in $P$ offene Menge $X \ni q$ derart, daß $X$ für alle $i \neq l$ zu $W_i^{j+1}$ fremd und $p \neq g^j(p) = h^j(p)$ für $p \in X$ ist. Bedeutet hierauf $p$ einen Punkt aus $X \cdot Y - W$, so ist $g^{j+1}(p) = g^j(p)$ und $h^{j-1}(p) = h^j(p)$, also $(^*_*)$ wegen $p \in X$ richtig. Ist $p$ ein Punkt aus $X \cdot Y \cdot W$, so ist $g^{j+1}(p) = g'(p)$ und $h^{j+1}(p) = h'(p)$, daher $(^*_*)$ wegen $p \in Y \cdot W$ und (7) richtig. Mithin ist $X \cdot Y$ eine Menge $\ni q$ der geforderten Art.

Weiter gilt:

$\mathrm{II}_2^{j+1}$. Auf $U^{j+1}$ haben $g^{j+1}$ und $h^{j+1}$ die gleiche Indexsumme.

Beweis von $\mathrm{II}_2^{j-1}$. Da $W$ zu $U^j$ fremd, ist $g^{j+1}(p) = g^j(p)$ und $h^{j+1}(p) = h^j(p)$ für $p \in U^j$, wegen $\mathrm{II}^j$ daher erstens die Indexsumme von $g^{j+1}$ auf $U^j$ gleich der von $h^{j+1}$ auf $U^j$. Wegen der Erklärung der Abbildungen $g'$ und $h'$ stimmen zweitens $g^{j-1}$ und $h^{j-1}$ auf $\sum V_i^{j-1}$ in ihren Indexsummen überein. Drittens haben $g^{j-1}$ und $h^{j-1}$ auf $\overline{U}^j - U^j$ keinen Fixpunkt. Daher folgt $\mathrm{II}_2^{j+1}$ aus (9) und $U^j \cdot \sum V_i^{j+1} = 0$.

Zum Beweis, daß

$$U^{j+1} + \sum S_i^{j+2} + \cdots + \sum S_i^n = U', \tag{10}$$

genügt es wegen $U^j + \sum S_i^{j+1} + \cdots + \sum S_i^n = U'$ und $U^{j+1} \subset U'$ zu zeigen, daß $U^j + \sum S_i^{j-1}$ in $U^{j-1}$ liegt: Es ist $S - \overline{U}^j = T \subset V$, nach (9) also die Menge $U^j + \sum (S_i^{j-1} - \overline{U}^j) + (\overline{U}^j - U') \cdot \sum S_i^{j-1}$, die aber mit $U^j + \sum S_i^{j+1}$ zusammenfällt, in $U^{j+1}$ gelegen.

Über $U^{j+1}$, $g^{j+1}$ und $h^{j+1}$ gilt $\mathrm{I}^{j+1}$ bis $\mathrm{III}^{j+1}$:

Zu $\mathrm{I}^{j+1}$. Wegen $g^{j+1}(p) = g^j(p)$ und $h^{j+1}(p) = h^j(p)$, $p \notin \sum W_i^{j+1}$, sowie $\mathrm{I}^j$ und (4) genügt es zum Beweis von $\mathrm{I}^{j+1}$ zu zeigen: auf $W$ stimmen die Indexsummen von $g^{j+1}$ und $g^j$, ebenso die von $h^{j+1}$ und $h^j$ überein. Dies folgt aber aus der Erklärung der Abbildungen $g'$ und $h'$.

Es folgt $\mathrm{II}^{j+1}$ aus $\mathrm{II}_1^{j+1}$ und $\mathrm{II}_2^{j+1}$.

Da der Durchmesser von $Z$ kleiner als $\alpha^{j+1}$, folgt $\mathrm{III}^{j+1}$ aus $\mathrm{III}^j$.

Für $j = -1$, $g^{-1} = g$, $h^{-1} = h$ und $U^{-1}$ als leerer Menge gilt $\mathrm{I}^j$ bis $\mathrm{III}^j$. Daher existieren stetige Abbildungen $g^n$ und $h^n$ von $P$ in sich mit den folgenden Eigenschaften I und II. I. Auf $U'$ stimmt die Indexsumme von $g^n$ mit der von $g$ überein, ebenso diejenige von $h^n$ mit der von $h$. II. Auf $U'$ haben $g^n$ und $h^n$ die gleiche Indexsumme.

Aus I und II folgt die Behauptung.

### 3. Die Homotopieinvarianz der algebraischen Fixpunktzahl.

Die Bedeutung von $r$, $n$, $P$, $Q$, $f$, $\alpha$ und $U$ sei die in Abschnitt 2 erklärte. Dann gilt folgender

Existenzsatz. *Es gibt eine stetige Abbildung $f'$ von $P$ in sich, die höchstens endlich viele Fixpunkte hat und von der*

$$f'(p) = f(p), \quad p \notin U, \quad \text{sowie} \quad \varrho\left(p, f'(p)\right) < \alpha, \quad p \in \overline{U},$$

*gilt.*

Beweis. Wegen $\varrho\left(p, f(p)\right) < \alpha$, $p \in \overline{U}$, sowie $p \neq f(p)$, $p \in P - U$, und der Kompaktheit von $\overline{U}$, $P - U$ existieren eine in $P$ offene Menge $V$ mit $\overline{V} \subset U$ und positive Zahlen $\zeta, \eta$ derart, daß sogar

$$\varrho\left(p, f(p)\right) < \alpha - \zeta \quad \text{für} \quad p \in \overline{U}, \quad \varrho\left(p, f(p)\right) > \eta \quad \text{für} \quad p \in P - V.$$

Nach dem in meiner Arbeit „Fixpunkttheorie in topologischen Mannigfaltigkeiten", Math. Z. **59**, 171—190 (1953), bewiesenen Approximationssatz existiert eine Schar $(f^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ stetiger Abbildungen $f^\tau$ von $P$ in sich mit $f^0 = f$, $\varrho(f, f^\tau) < \min(\zeta, \eta)$, $0 \leq \tau \leq 1$, und der Eigenschaft, daß $f^1$ höchstens endlich viele Fixpunkte hat.

Für $p \in P$ werde die Zahl $\varrho(p, P - U)/\left(\varrho(p, P - U) + \varrho(p, \overline{V})\right)$ mit $\lambda(p)$ bezeichnet. Hierauf ist die durch $f'(p) = f^{\lambda(p)}(p)$, $p \in P$, bestimmte Abbildung $f'$ von der verlangten Art.

Die obige Erklärung der algebraischen Fixpunktzahl ist damit als eindeutig und möglich erwiesen. Und aus dem nachstehenden Deformationssatz folgt, daß *in $P$ die algebraische Fixpunktzahl homotopieinvariant:* Bedeutet $(f^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ eine Schar stetiger Abbildungen $f^\tau$ von $P$ in sich, so gibt es zu jeder Zahl $\tau$ aus $[0, 1]$ eine Zahl $\varepsilon^\tau > 0$ derart, daß für alle $\sigma$ mit $|\sigma - \tau| < \varepsilon^\tau$ die Abbildungen $f^\sigma$ und $f^\tau$ in ihren algebraischen Fixpunktzahlen übereinstimmen. Bereits von endlich vielen der Intervalle $(\tau - \varepsilon^\tau, \tau + \varepsilon^\tau)$, $0 \leq \tau \leq 1$, wird das Intervall $[0, 1]$ überdeckt.

Unsere Untersuchungen schließen mit dem folgenden

Deformationssatz. *Ist $(f^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ eine Schar stetiger Abbildungen $f^\tau$ von $P$ in sich, so existiert eine Zahl $\varepsilon > 0$ derart, daß jede Abbildung $f^\tau$ mit $\tau < \varepsilon$ die gleiche algebraische Fixpunktzahl wie $f^0$ hat.*

Beweis. Es sei $Q^0$ die Menge der Fixpunkte von $f^0$, $U^0$ eine in $P$ offene Menge $\supset Q^0$, $g^0$ eine stetige Abbildung von $P$ in sich mit höchstens endlich vielen Fixpunkten und den Eigenschaften: für $p \in P - U^0$ ist $g^0(p) = f^0(p)$, für $p \in \overline{U}^0$ ist $\varrho\left(p, f^0(p)\right) < \alpha$ und $\varrho\left(p, g^0(p)\right) < \alpha$. Dann ist die Indexsumme von $g^0$ die algebraische Fixpunktzahl von $f^0$.

Wenn *erstens* $U^0 = P$, so ist $U^0$ kompakt. Es gibt daher eine Zahl $\delta > 0$ derart, daß sogar $\varrho\left(p, f^0(p)\right) < \alpha - \delta$ für $p \in P$. Hierauf ist $\varepsilon > 0$ eine Zahl der verlangten Art, falls $\varrho(f^0, f^\tau) < \delta$ für alle $\tau < \varepsilon$.

*Zweitens* sei $U^0 \neq P$. Aus $\varrho\left(p, f^0(p)\right) < \alpha$, $p \in \overline{U}^0$, sowie $p \neq f^0(p)$, $p \in P - U^0$, und der Kompaktheit von $\overline{U}^0$, $P - U^0$ folgt die Existenz einer in $P$ offenen Menge $U \supset \overline{U}^0$ und einer Zahl $\delta > 0$, so daß sogar

(1) $\varrho\left(p, f^0(p)\right) < \alpha - \delta$ für $p \in \overline{U}$, $\varrho\left(p, f^0(p)\right) > \delta$ für $p \in P - U^0$.

Dann bedeute $\varepsilon > 0$ eine Zahl derart, daß für $0 < \tau < \varepsilon$ alle Fixpunkte der Abbildung $f^\tau$ in $U^0$ liegen und $\varrho(f^0, f^\tau) < \delta$ ist; ferner $\zeta$ eine Zahl aus $(0, \varepsilon)$.

Zum Beweis, daß die Abbildungen $f^0$ und $f^\zeta$ die gleiche algebraische Fixpunktzahl haben, sei

$$\lambda(p) = \varrho(p, \overline{U}^0)/\big(\varrho(p, \overline{U}^0) + \varrho(p, P - U)\big) \quad \text{für} \quad p \in P, \tag{2}$$

hierauf $g^\zeta$ die durch

$$g^\zeta(p) = g^0(p), \quad p \in \overline{U}^0, \quad \text{und} \quad g^\zeta(p) = f^{\zeta\lambda(p)}(p), \quad p \in P - U^0, \tag{3}$$

bestimmte Abbildung von $P$ in sich.

Aus $\varrho(f^0, f^\tau) < \delta$, $0 \leqq \tau \leqq \zeta$, und (1) bis (3) folgt: für $p \in \overline{U}$ ist $\varrho\left(p, f^\zeta(p)\right) < \alpha$ und $\varrho\left(p, g^\zeta(p)\right) < \alpha$, für $p \in P - U^0$ ist $p \neq g^\zeta(p)$. Mithin: die Abbildung $g^\zeta$ hat höchstens endlich viele Fixpunkte, und ihre Indexsumme ist die algebraische Fixpunktzahl von $f^\zeta$; die Indexsummen von $g^0$ und $g^\zeta$ stimmen überein.

Der Beweis ist damit beendet.

*Fulda, Marienstr. 9.*

*(Eingegangen am 11. Mai 1954.)*

HUPPERT, B., und N. ITÔ
Math. Zeitschr. Bd. 61, S. 94—99 (1954)

# Über die Auflösbarkeit faktorisierbarer Gruppen. II.

Von
BERTRAM HUPPERT und NOBORU ITÔ.

In einer früheren Arbeit des gleichen Titels (HUPPERT [4]) waren folgende Sätze bewiesen worden:

Satz 1. Das Produkt einer Diedergruppe mit einer abelschen Gruppe ist auflösbar.

Satz 2. Das Produkt einer Diedergruppe mit einer $p$-Gruppe ist auflösbar.

Es liegt nahe, diese beiden Sätze zu verallgemeinern zu der Aussage: Das Produkt einer Diedergruppe mit einer nilpotenten Gruppe ist auflösbar. Beim Beweis werden nicht alle Eigenschaften der Diedergruppen benötigt, sondern nur die Existenz eines zyklischen Normalteilers vom Index 2. Wir formulieren also, indem wir die Numerierung aus [4] fortsetzen:

Satz 4. *Die Gruppe* $\mathfrak{L}$ *habe einen zyklischen Normalteiler* $\mathfrak{Z}$ *vom Index* 2. *Dann ist das Produkt* $\mathfrak{G} = \mathfrak{L} \cdot \mathfrak{N}$ *von* $\mathfrak{L}$ *mit einer nilpotenten Gruppe* $\mathfrak{N}$ *auflösbar.*

Satz 4 ist nicht mehr richtig, wenn wir von $\mathfrak{L}$ nur fordern, daß es einen zyklischen Normalteiler von Primzahlindex hat. Dies zeigt das von N. ITÔ angegebene Beispiel der Zerlegung der einfachen Gruppe der Ordnung 168 in das Produkt einer Diedergruppe der Ordnung 8 mit einer Gruppe der Ordnung 21, welche einen Normalteiler der Ordnung 7 besitzt.

Neben Satz 4 beweisen wir noch einen sehr „unsymmetrischen" Auflösbarkeitssatz.

Definition. Die Gruppe $\mathfrak{G}$ heißt $p$-nilpotent, wenn sie einen Normalteiler $\mathfrak{N}$ besitzt, dessen Faktorgruppe $\mathfrak{G}\,\mathfrak{N}$ isomorph ist zu einer (und dann jeder) $p$-SYLOW-Gruppe von $\mathfrak{G}$, d.h. wenn $\mathfrak{G}$ ein invariantes $p$-Komplement besitzt (s. etwa ITÔ [7]).

Satz 5. $\mathfrak{U}$ *sei* 2*-nilpotent. Ferner sei die Kommutatorgruppe* $\mathfrak{U}'$ *nilpotent. Dann ist das Produkt von* $\mathfrak{U}$ *mit einer zyklischen Gruppe* $\mathfrak{Z}$ *von ungerader Ordnung auflösbar.*

Insbesondere erfaßt Satz 5 den Fall, daß $\mathfrak{U}$ eine überauflösbare Gruppe ist (Definition und Eigenschaften der überauflösbaren Gruppen in HUPPERT [5]). Die 2-Nilpotenz kann nicht durch $p$-Nilpotenz mit einem beliebigen $p$ ersetzt werden, denn die alternierende Gruppe $\mathfrak{A}_5$ erlaubt die Zerlegung in das Produkt einer alternierenden Gruppe $\mathfrak{A}_4$ mit einer zyklischen Gruppe der Ordnung 5. Auch die Voraussetzung, daß $\mathfrak{Z}$ ungerade Ordnung hat, ist nicht überflüssig. Hat $\mathfrak{Z}$ gerade Ordnung, so treten schon für Gruppen $\mathfrak{U}$ mit sehr übersichtlicher Struktur Gegenbeispiele auf. Zum Beispiel erlaubt die symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}_5$ in 5 Symbolen die Zerlegung $\mathfrak{S}_5 = \mathfrak{Z} \cdot \mathfrak{U}$, wobei

$\mathfrak{Z}$ eine zyklische Gruppe der Ordnung 6 und $\mathfrak{U}$ der überauflösbare Normalisator der 5-SYLOW-Gruppe von $\mathfrak{S}_5$ ist.

Bezeichnungen. $(\mathfrak{G})$ = Ordnung von $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{U} < \mathfrak{G}$ bedeutet: $\mathfrak{U}$ ist Untergruppe von $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{U} \lhd \mathfrak{G}$: $\mathfrak{U}$ ist Normalteiler von $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{G}_p = p$-SYLOW-Gruppe von $\mathfrak{G}$; ${}_p\mathfrak{G} = p$-SYLOW-Komplement von $\mathfrak{G}$ (s. HALL [3]); $\mathfrak{G}'(p) = p$-Kommutatorgruppe von $\mathfrak{G}$ (s. ZASSENHAUS [14], S. 122); $\mathfrak{N}(\mathfrak{U}) =$ Normalisator der Untergruppe $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}) =$ Zentrum von $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{U}^X = X^{-1}\mathfrak{U}X$; ist $p^\alpha | m$, aber $p^{\alpha+1} \nmid m$, so schreiben wir $p^\alpha \top m$.

Beweis von Satz 4. Wir führen eine Induktion nach der Gruppenordnung $(\mathfrak{G})$ durch. Es genügt der Nachweis eines auflösbaren Normalteilers, der von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{G}$ verschieden ist. Sei $(\mathfrak{Z}) = n$.

a) Ist $\mathfrak{D} = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{Z} \neq \mathfrak{E}$, so haben wir $\mathfrak{D} \lhd \mathfrak{L}$. Nach ORE [8] oder SZÉP-RÉDEI [11] gibt es dann einen Normalteiler $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{D} < \mathfrak{K} < \mathfrak{N}$. Als Untergruppe von $\mathfrak{N}$ ist $\mathfrak{K}$ auflösbar. Ist $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{L} \neq \mathfrak{E}$, so gilt also $\mathfrak{G} = \mathfrak{Z} \cdot \mathfrak{N}$, und $\mathfrak{G}$ ist nach ITÔ [6] auflösbar. Wir dürfen daher $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{L} = \mathfrak{E}$ annehmen.

b) Sei $\mathfrak{N}$ eine maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$. Falls $(\mathfrak{N}) = 2^\alpha$, so ist $\mathfrak{G}$ wegen $\mathfrak{G} = \mathfrak{Z} \cdot \mathfrak{G}_2$ nach ITÔ [6] auflösbar. Daher können wir annehmen, daß es eine Primzahl $p \neq 2$ mit $p | (\mathfrak{N})$ gibt. Ist $\mathfrak{N}_p \neq \mathfrak{G}_p$, so gilt $p | (\mathfrak{N}(\mathfrak{N}_p)/\mathfrak{N}_p)$ (s. ZASSENHAUS [14], S. 105, Satz 10). Also ist $\mathfrak{N}(\mathfrak{N}_p)$ eine echte Obergruppe von $\mathfrak{N}$, woraus $\mathfrak{N}(\mathfrak{N}_p) = \mathfrak{G}$, d.h. $\mathfrak{N}_p \lhd \mathfrak{G}$ folgt. Sei also $\mathfrak{N}_p = \mathfrak{G}_p$ und $\mathfrak{N}(\mathfrak{N}_p) = \mathfrak{N}$.

Ist $\mathfrak{G}$ $p$-normal, so gilt nach einem Satz von GRÜN (GRÜN [2], ZASSENHAUS [14], S. 135) $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}'(p) \cong \mathfrak{N}/\mathfrak{N}'(p) \neq \mathfrak{E}$, also $\mathfrak{G} \neq \mathfrak{G}'(p)$. Wegen $\mathfrak{N}_p = \mathfrak{G}_p$ ist $p \nmid (\mathfrak{L})$, woraus $\mathfrak{L} < \mathfrak{G}'(p)$ folgt. Daher hat $\mathfrak{G}'(p)$ die Gestalt $\mathfrak{G}'(p) = \mathfrak{L} \cdot \overline{\mathfrak{N}}$ mit $\overline{\mathfrak{N}} < \mathfrak{N}$, ist somit nach unserer Induktionsannahme auflösbar.

Ist $\mathfrak{G}$ nicht $p$-normal, so gilt für ein geeignetes $X \in \mathfrak{G}$ $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_p) < \mathfrak{G}_p^X$, aber $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_p) \prec \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_p^X)$. Dann ist $X \notin \mathfrak{N}$. Der Normalisator $\mathfrak{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_p))$ umfaßt nun $\mathfrak{N}$ und das $p$-Komplement ${}_p\mathfrak{N}^X$ von $\mathfrak{N}^X$. Ist ${}_p\mathfrak{N} \neq \mathfrak{E}$ und $\mathfrak{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_p)) \neq \mathfrak{G}$, so folgt $\mathfrak{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_p)) = \mathfrak{N} = \{\mathfrak{N}, {}_p\mathfrak{N}^X\}$, also ${}_p\mathfrak{N}^X = {}_p\mathfrak{N}$ und dann $\mathfrak{N}({}_p\mathfrak{N}) > \{\mathfrak{N}, X\} = \mathfrak{G}$ (wegen $X \notin \mathfrak{N}$). Der Fall $\mathfrak{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_p)) = \mathfrak{G}$ ist trivial. Sei nun ${}_p\mathfrak{N} = \mathfrak{E}$, also $(\mathfrak{N}) = p^\alpha$.

Ist $2 | n$, so gilt $\mathfrak{Z}(\mathfrak{L}) \neq \mathfrak{E}$, denn $\mathfrak{Z}(\mathfrak{L}_2) \cap \mathfrak{Z}$ ist sicher verschieden von $\mathfrak{E}$ und liegt in $\mathfrak{Z}(\mathfrak{L})$. Die Anzahl der Konjugierten eines von $E$ verschiedenen Elementes von $\mathfrak{Z}(\mathfrak{L})$ ist eine Potenz von $p$. Nach einem bekannten Satz von BURNSIDE (SPEISER [10], S. 193) besitzt dann $\mathfrak{G}$ einen eigentlichen Normalteiler $\mathfrak{K}$. Ist $\mathfrak{K} \cdot \mathfrak{N} \neq \mathfrak{G}$, so haben wir $\mathfrak{K} \cdot \mathfrak{N} = \overline{\mathfrak{L}} \cdot \mathfrak{N}$ mit $\overline{\mathfrak{L}} < \mathfrak{L}$, und $\mathfrak{K} \cdot \mathfrak{N}$ ist nach unserer Induktionsannahme oder nach ITÔ [6] auflösbar. Dann ist auch $\mathfrak{K}$ auflösbar, und wir sind fertig. Sei daher $\mathfrak{K} \cdot \mathfrak{N} = \mathfrak{G}$. Wegen $(\mathfrak{N}) = p^\alpha$ folgt daraus $(\mathfrak{G}/\mathfrak{K}) = p^\beta$. Infolge der Teilerfremdheit von $2n$ und $p$ ist $\mathfrak{K} \cdot \mathfrak{L} \neq \mathfrak{G}$, also $\mathfrak{K} \cdot \mathfrak{L} = \overline{\mathfrak{N}} \cdot \mathfrak{L}$ (mit $\overline{\mathfrak{N}} < \mathfrak{N}$) nach Induktionsannahme auflösbar, und dann $\mathfrak{K}$ ebenfalls.

Sei schließlich $2 \nmid n$. Dann ist $2 \top (\mathfrak{G})$, also ${}_2\mathfrak{G} = \mathfrak{N} \cdot \mathfrak{Z} \lhd \mathfrak{G}$. Gemäß ITÔ [6] ist ${}_2\mathfrak{G}$ auflösbar.

c) Sei $\mathfrak{N}$ nicht maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{N} \cdot \mathfrak{R}$ eine maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{E} \neq \mathfrak{R} < \mathfrak{L}$. Falls $\mathfrak{D} = \mathfrak{R} \cap \mathfrak{Z} \neq \mathfrak{E}$, so ist $\mathfrak{D} \lhd \mathfrak{L}$, und es gibt

nach ORE [8] oder SZÉP-RÉDEI [11] einen Normalteiler $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{D} < \mathfrak{K} < \mathfrak{N} \cdot \mathfrak{R}$. Nach unserer Induktionsannahme oder nach ITÔ [6] ist $\mathfrak{N} \cdot \mathfrak{R}$ auflösbar, also $\mathfrak{K}$ ebenfalls. Wir können daher annehmen, daß $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{Z} = \mathfrak{E}$, also $(\mathfrak{R}) = 2$ und $\mathfrak{L} = \mathfrak{R} \cdot \mathfrak{Z}$ gilt. Somit besitzt $\mathfrak{Z}$ in $\mathfrak{L}$ die Gruppe $\mathfrak{R}$ als Vertretergruppe. Bei der weiteren Untersuchung sind verschiedene Fälle zu unterscheiden.

d) Sei $2 \mid n$ und $2 \mid (\mathfrak{N})$. Die maximale Untergruppe $\mathfrak{N} \cdot \mathfrak{R}$ von $\mathfrak{G}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{H}$. Nach WIELANDT [13] ist $\mathfrak{R} \cdot \mathfrak{N}_2$ eine 2-SYLOW-Gruppe von $\mathfrak{H}$. Wegen $2 \mid n$ gibt es eine Untergruppe $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{S} \rhd \mathfrak{H}_2 \rhd \mathfrak{N}_2$ und $(\mathfrak{S}/\mathfrak{H}_2) = 2$; denn wegen $\mathfrak{H}_2 \neq \mathfrak{G}_2$ gilt $\mathfrak{H}_2 \neq \mathfrak{G}_2 \cap \mathfrak{N}(\mathfrak{H}_2)$ (s. ZASSENHAUS [14], S. 105, Satz 10). Nun stellen wir $\mathfrak{S}$ dar als Permutationsgruppe der Nebenklassen von $\mathfrak{N}_2$, also als Permutationsgruppe in 4 Symbolen. Dabei wird ein Normalteiler $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{T} < \mathfrak{N}_2$ und $(\mathfrak{N}_2/\mathfrak{T}) \mid 2$ auf $\mathfrak{E}$ abgebildet. Ist $\mathfrak{T} \neq \mathfrak{E}$, so haben wir $\mathfrak{N}(\mathfrak{T}) > \{\mathfrak{S}, {}_2\mathfrak{N}\} = \mathfrak{G}$. Sei daher $\mathfrak{T} = \mathfrak{E}$, also $2 \top (\mathfrak{N})$. Dann besitzt $\mathfrak{S}$ eine treue Darstellung vom Grad 4. Ist $2^2 \mid n$, so stellen wir $\mathfrak{G}_2 = \mathfrak{Z}_2 \cdot \mathfrak{H}_2$ (s. WIELANDT [13]) dar als Permutationsgruppe der Nebenklassen von $\mathfrak{Z}_2$. Dann enthält $\mathfrak{Z}_2$ einen von $\mathfrak{E}$ verschiedenen Normalteiler von $\mathfrak{G}_2$, enthält daher auch mindestens ein von $E$ verschiedenes Zentrumselement $C$ von $\mathfrak{G}_2$. Es folgt $\mathfrak{N}(\mathfrak{N}_2) > \{\mathfrak{N}, C\}$. Da nach c) keine von $\mathfrak{G}$ verschiedene Obergruppe von $\mathfrak{N}$ mit $\mathfrak{Z}$ Elemente $\neq E$ gemeinsam hat, folgt $\mathfrak{N}(\mathfrak{N}_2) = \mathfrak{G}$, also $\mathfrak{N}_2 \lhd \mathfrak{G}$. Wir können uns daher beschränken auf den Fall $2 \top n$ mit $\mathfrak{S} = \mathfrak{G}_2$. Da $\mathfrak{G}_2$ eine treue Darstellung als Permutationsgruppe vom Grad 4 besitzt, ist $\mathfrak{G}_2$ isomorph zur Diedergruppe $\mathfrak{D}_{2 \cdot 4}$ der Ordnung 8. Es gilt $\mathfrak{L}_2 = \mathfrak{Z}_2 \times \mathfrak{R}$ und $\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{R} \times \mathfrak{N}_2$. Unter Beachtung von $(\mathfrak{Z}(\mathfrak{D}_{2 \cdot 4})) = 2$ folgt daraus $\mathfrak{R} = \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_2)$.

Nun stellen wir $\mathfrak{G}$ dar als Permutationsgruppe der Nebenklassen von $\mathfrak{H} = \mathfrak{R} \cdot \mathfrak{N}$. Dabei wird $\mathfrak{Z}$ regulär dargestellt und enthält wegen $2 \mid n$ ungerade Permutationen. Die geraden Permutationen bilden daher einen eigentlichen Normalteiler $\mathfrak{K}$ vom Index 2 in $\mathfrak{G}$. Es ist $\mathfrak{Z} \prec \mathfrak{K}$ und $\mathfrak{R} < \mathfrak{K}$ wegen $\mathfrak{G}_2 \cap \mathfrak{K} \lhd \mathfrak{G}_2$. Ist $\mathfrak{N}_2 < \mathfrak{K}$, so folgt $\mathfrak{N} < \mathfrak{K}$, und $\mathfrak{K} = \mathfrak{N} \cdot \overline{\mathfrak{L}}$ ist nach Induktionsannahme oder nach ITÔ [6] auflösbar. Sei daher $\mathfrak{N}_2 \prec \mathfrak{K}$. Mit $\mathfrak{N}_2 = \{N\}$ und $\mathfrak{Z}_2 = \{Z\}$ gilt dann $L = NZ \in \mathfrak{K}$. Da $N$ und $Z$ nicht vertauschbar sind (sonst wäre $\mathfrak{D}_{2 \cdot 4}$ abelsch), ist $L^2 \neq E$, $L^4 = E$; denn das Produkt von zwei nicht vertauschbaren Elementen der Ordnung 2 von $\mathfrak{D}_{2 \cdot 4}$ hat die Ordnung 4. Also ist $\mathfrak{K}_2$ zyklisch und liegt daher im Zentrum seines Normalisators. Nach einem Satz von BURNSIDE (ZASSENHAUS [14], S. 133) folgt $\mathfrak{K}/\mathfrak{K}'(2) \cong \mathfrak{K}_2$, also $\mathfrak{K}'(2) = {}_2\mathfrak{L} \cdot {}_2\mathfrak{N}$. Da ${}_2\mathfrak{L}$ zyklisch ist, ist $\mathfrak{K}'(2)$ nach ITÔ [6] auflösbar. Daraus folgt die Auflösbarkeit von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{G}$.

e) Sei $2 \mid n$, aber $2 \nmid (\mathfrak{N})$. Wir stellen $\mathfrak{G}$ dar als Permutationsgruppe der Nebenklassen von $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}\,\mathfrak{N}$. Dabei wird $\mathfrak{Z}$ durch ungerade Permutationen dargestellt. $\mathfrak{G}$ besitzt deshalb einen Normalteiler $\mathfrak{K}$ vom Index 2. Wegen $2 \nmid (\mathfrak{N})$ ist $\mathfrak{N} < \mathfrak{K}$, also $\mathfrak{K} = \mathfrak{N} \cdot \overline{\mathfrak{L}}$ mit $\overline{\mathfrak{L}} < \mathfrak{L}$ nach Induktionsannahme oder nach ITÔ [6] auflösbar.

f) Schließlich behandeln wir den Fall $2 \nmid n$. Dann gilt $\mathfrak{G}_2 = \mathfrak{H}_2$. Ist $2 \nmid (\mathfrak{N})$, so haben wir $2 \top (\mathfrak{G})$, also $\mathfrak{G}'(2) = {}_2\mathfrak{G} = \mathfrak{Z} \cdot \mathfrak{N} \lhd \mathfrak{G}$, und $\mathfrak{G}$ ist auflösbar.

Wir stellen $\mathfrak{G}$ dar als Permutationsgruppe der Nebenklassen von $\mathfrak{H}$. Dabei dürfen wir annehmen, daß diese Darstellung treu ist; denn andernfalls hätten

wir einen von $\mathfrak{E}$ verschiedenen, in $\mathfrak{J}$ liegenden Normalteiler von $\mathfrak{G}$ aufgefunden, der als Untergruppe von $\mathfrak{J}$ auflösbar wäre. Da $\mathfrak{J}$ maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ist, ist die betrachtete Darstellung von $\mathfrak{G}$ primitiv. $\mathfrak{Z}$ wird dabei regulär dargestellt. Ist $n$ keine Primzahl, so ist $\mathfrak{G}$ nach einem Satz von SCHUR zweifach transitiv (SCHUR [9], WIELANDT [12]). Ist $n$ eine Primzahl, so ist $\mathfrak{G}$ nach einem Satz von BURNSIDE zweifach transitiv oder auflösbar (BURNSIDE [1], S. 341). In jedem Falle können wir also annehmen, daß $\mathfrak{G}$ zweifach transitiv ist, also $\mathfrak{J}$ geeignete $n-1$ Symbole noch transitiv permutiert.

Zunächst betrachten wir den Fall $\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2)=\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_2)<\mathfrak{N}_2$. Dann ist der Normalisator $\mathfrak{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2))=\mathfrak{J}$ gleich dem Zentralisator $\mathfrak{C}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2))$ von $\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2)$. Sei zuerst $\mathfrak{G}$ nicht 2-normal. Dann gibt es ein $X\in\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2)^X<\mathfrak{J}_2$, aber $\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2)^X<\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2)$, woraus $X\notin\mathfrak{J}$ folgt. Sei $X=JZ$ mit $E\neq Z\in\mathfrak{Z}$ und $J\in\mathfrak{J}$. Aus $\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2)^X=\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2)^Z<\mathfrak{J}_2$ folgt $\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2)<\mathfrak{J}_2^{Z^{-1}}<\mathfrak{J}^{Z^{-1}}$, also $\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2)<\mathfrak{J}\cap\mathfrak{J}^{Z^{-1}}$. Ferner ist $\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2)\lhd\mathfrak{J}$ wegen $\mathfrak{J}=\mathfrak{C}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2))$. Da aber $\mathfrak{J}$ noch in $n-1$ Symbolen transitiv ist, kann der Normalteiler $\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2)$ von $\mathfrak{J}$ nur ein Symbole fest lassen, liegt daher sicher nicht in $\mathfrak{J}^{Z^{-1}}$. Das ist ein Widerspruch. Die Annahme, daß $\mathfrak{G}$ nicht 2-normal ist, ist daher zu verwerfen.

Ist $\mathfrak{G}$ 2-normal, so folgern wir aus dem Satz von GRÜN (GRÜN [2], ZASSENHAUS [14], S. 135) $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}'(2)\cong\mathfrak{J}/\mathfrak{J}'(2)$. Aus $\mathfrak{G}=\mathfrak{G}'(2)\cdot\mathfrak{J}$ erhalten wir

$$\mathfrak{G}/\mathfrak{G}'(2)\cong\mathfrak{J}/\mathfrak{J}'(2)\cong\mathfrak{J}/\mathfrak{J}\cap\mathfrak{G}'(2),$$

also $\mathfrak{G}'(2)\cdot\mathfrak{J}=\mathfrak{J}'(2)<\mathfrak{N}$. Sicher gilt $\mathfrak{Z}<\mathfrak{G}'(2)$ und ${}_2\mathfrak{N}<\mathfrak{G}'(2)$. Ferner gibt es eine 2-SYLOW-Gruppe $\mathfrak{G}'(2)_2$ von $\mathfrak{G}'(2)$ mit $\mathfrak{G}'(2)_2<\mathfrak{J}_2$, also $\mathfrak{G}'(2)_2<\mathfrak{G}'(2)\cdot\mathfrak{J}<\mathfrak{N}$. Wegen $\mathfrak{G}'(2)=\mathfrak{Z}\cdot{}_2\mathfrak{N}\cdot\mathfrak{G}'(2)_2$ hat $\mathfrak{G}'(2)$ die Gestalt $\mathfrak{Z}\cdot\overline{\mathfrak{N}}$ mit $\overline{\mathfrak{N}}<\mathfrak{N}$, ist daher nach ITÔ [6] auflösbar.

Sei nun $\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2)<\mathfrak{N}_2$. Dann gibt es ein Element $C=RN\in\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2)$ mit $E\neq R\in\mathfrak{N}$ und $N\in\mathfrak{N}$. Sei ferner $Y\in\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}_2)$. Dann ist $C^Y=C$, also $RN=(RN)^Y=R^YN$, somit $R^Y=R$. Daher liegt $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}_2)$ in $\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2)$.

Ist $\mathfrak{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2))<\mathfrak{J}$, so existiert ein Element $ZJ\in\mathfrak{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2))$ mit $E\neq Z\in\mathfrak{Z}$ und $J\in\mathfrak{J}$. Aus $\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2)^{ZJ}=\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2)$ folgt $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}_2)^Z<\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2)^Z=\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2)^{J^{-1}}<\mathfrak{J}$, also $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}_2)<\mathfrak{J}^{Z^{-1}}\cap\mathfrak{J}$. Wegen $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}_2)\lhd\mathfrak{J}$ ist dies wie oben im Widerspruch zu der Tatsache, daß $\mathfrak{J}$ noch geeignete $n-1$ Symbole transitiv permutiert.

Sei schließlich $\mathfrak{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2))=\mathfrak{J}$. Ist $\mathfrak{G}$ nicht 2-normal, so existiert ein $X\in\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2)^X<\mathfrak{J}_2$, aber $\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2)^X\lhd\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2)$. Angenommen, es sei $X=AB\in\mathfrak{J}$ mit $A\in\mathfrak{J}_2$ und $B\in{}_2\mathfrak{J}$. Dann ist $\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2)^X=\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2)^B<\mathfrak{J}_2$. Für jedes $C\in\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2)$ folgt wegen ${}_2\mathfrak{J}\lhd\mathfrak{J}$ die Beziehung $BCB^{-1}C^{-1}\in\mathfrak{J}_2\cap{}_2\mathfrak{J}=\mathfrak{E}$, also $BC=CB$ und dann $\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2)^B=\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2)$, im Widerspruch zu $\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2)^X\neq\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2)$. Daher liegt $X$ nicht in $\mathfrak{J}$, und es gilt $X=ZJ$ mit $E\neq Z\in\mathfrak{Z}$ und $J\in\mathfrak{J}$. Nun erhalten wir $\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2)^Z<\mathfrak{J}_2^{J^{-1}}<\mathfrak{J}$ oder $\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2)<\mathfrak{J}^{Z^{-1}}$ und dann $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}_2)<\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2)<\mathfrak{J}\cap\mathfrak{J}^{Z^{-1}}$. Wegen $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}_2)\lhd\mathfrak{J}$ ist dies der schon zweimal aufgetretene Widerspruch.

Ist aber $\mathfrak{G}$ 2-normal, so liefert der Satz von GRÜN uns $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}'(2)\cong\mathfrak{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2))/\mathfrak{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2))'(2)\neq\mathfrak{E}$. Die frühere Betrachtung läßt sich wegen $\mathfrak{J}_2<\mathfrak{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2))<\mathfrak{J}$ nun mit $\mathfrak{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2))$ an Stelle von $\mathfrak{J}$ durchführen und ergibt

für $\mathfrak{G}'(2)$ die Gestalt $\mathfrak{G}'(2) = \mathfrak{Z} \cdot \overline{\mathfrak{N}}$ mit $\overline{\mathfrak{N}} < \mathfrak{N}$, also nach ITÔ [6] die Auflösbarkeit von $\mathfrak{G}'(2)$.

Damit ist der Beweis von Satz 4 beendet.

Beweis von Satz 5 durch Induktion nach $(\mathfrak{G})$. Wieder genügt der Nachweis eines eigentlichen auflösbaren Normalteilers von $\mathfrak{G}$. Sei $(\mathfrak{Z}) = n$, also nach unserer Voraussetzung $2 \nmid n$.

a) Ist $\mathfrak{D} = \mathfrak{U} \cap \mathfrak{Z} \neq \mathfrak{E}$, so gilt $\mathfrak{D} \lhd \mathfrak{Z}$. Nach ORE [8] oder SZÉP-RÉDEI [11] existiert dann ein Normalteiler $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{D} < \mathfrak{N} < \mathfrak{U}$. Als Untergruppe von $\mathfrak{U}$ ist $\mathfrak{N}$ auflösbar. Ist $\mathfrak{U}$ nicht maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$, so gibt es eine maximale Untergruppe $\mathfrak{V} = \mathfrak{U} \cdot \overline{\mathfrak{Z}}$ von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{E} \neq \overline{\mathfrak{Z}} < \mathfrak{Z}$. Dann haben wir $\mathfrak{G} = \mathfrak{Z} \cdot \mathfrak{V}$ und $\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{V} = \overline{\mathfrak{Z}} \lhd \mathfrak{Z}$. Wie eben gibt es dann ein $\mathfrak{M} \lhd \mathfrak{G}$ mit $\overline{\mathfrak{Z}} < \mathfrak{M} < \mathfrak{V}$. Nach unserer Induktionsannahme ist $\mathfrak{V}$ auflösbar, also $\mathfrak{M}$ ebenfalls. Wir dürfen also annehmen, daß $\mathfrak{U}$ eine maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ist und $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{Z} = \mathfrak{E}$ gilt.

b) Wir stellen $\mathfrak{G}$ dar als transitive Permutationsgruppe der Nebenklassen von $\mathfrak{U}$. Ist diese Darstellung nicht treu, so gibt es einen Normalteiler $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{N} < \mathfrak{U}$, der somit auflösbar ist. Also können wir annehmen, daß die Darstellung treu ist. Da $\mathfrak{U}$ maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ist, haben wir sogar eine primitive Darstellung vor uns. $\mathfrak{G}$ enthält die regulär dargestellte zyklische Gruppe $\mathfrak{Z}$. Ist $n$ keine Primzahl, so ist $\mathfrak{G}$ nach einem Satz von SCHUR zweifach transitiv (SCHUR [9], WIELANDT [12]). Ist aber $n$ eine Primzahl, so ist $\mathfrak{G}$ zweifach transitiv oder auflösbar (BURNSIDE [1], S. 341). In jedem Falle können wir daher annehmen, daß $\mathfrak{G}$ zweifach transitiv ist. Daraus folgt $n - 1 \mid (\mathfrak{U})$, insbesondere $2 \mid (\mathfrak{U})$.

c)[1]. Sei zunächst $\mathfrak{N}(\mathfrak{U}_2) \not< \mathfrak{U}$. Dann läßt $\mathfrak{U}_2$ sicher mehr als ein Symbol fest. $\mathfrak{K}$ sei ein minimaler Normalteiler von $\mathfrak{U}$. Sei $(\mathfrak{K}) = p^\alpha$. Ist $(\mathfrak{U}) \neq 2^\lambda$, so können wir wegen der 2-Nilpotenz $\mathfrak{K}$ so wählen, daß $p \neq 2$ gilt. Bei geeigneter Benennung der Symbole läßt $\mathfrak{K}$ nur 1 fest. Die restlichen $n - 1$ Symbole zerfallen unter $\mathfrak{K}$ in $j$ Transitivitätsgebiete $\mathfrak{u}_i$ gleicher Länge. Entsprechend der Intransitivität von $\mathfrak{K}$ ist $\mathfrak{U}$ imprimitiv. Da $\mathfrak{K}$ auf den $\mathfrak{u}_i$ transitiv dargestellt wird, enthält jedes $\mathfrak{u}_i$ etwa $p^\varrho$ Symbole. Also ist $n = 1 + j\, p^\varrho$. Ist $p = 2$, so haben wir $(\mathfrak{U}) = 2^\lambda$, und $\mathfrak{G}$ ist nach ITÔ [6] auflösbar. Sei daher $p \neq 2$ und dann wegen $2 \mid n - 1$ notwendig $2 \mid j$.

$\mathfrak{U}_2$ lasse neben 1 auch das Symbol 2 fest. Dann bleibt $\mathfrak{u}_1$, wenn wir etwa $2 \in \mathfrak{u}_1$ annehmen, bei $\mathfrak{U}_2$ als Ganzes fest, aber nicht notwendig elementweise. $\mathfrak{V}$ sei diejenige Untergruppe von $\mathfrak{U}$, welche $\mathfrak{u}_1$ fest läßt. Da $\mathfrak{U}$ die $\mathfrak{u}_i$ transitiv vertauscht, gilt $(\mathfrak{U} : \mathfrak{V}) = j$. Offenbar liegt $\mathfrak{U}_2$ in $\mathfrak{V}$. Daraus folgt $2 \nmid (\mathfrak{U} : \mathfrak{V}) = j$, im Widerspruch zu $2 \mid j$.

d) Sei nun $\mathfrak{N}(\mathfrak{U}_2) < \mathfrak{U}$. Ist $\mathfrak{U}_2$ abelsch, so liegt es im Zentrum von $\mathfrak{N}(\mathfrak{U}_2)$; denn auch $\mathfrak{N}(\mathfrak{U}_2)$ ist als Untergruppe von $\mathfrak{U}$ 2-nilpotent. Nach einem Satz von BURNSIDE (ZASSENHAUS [14], S. 133) folgt dann $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}'(2) \cong \mathfrak{G}_2 = \mathfrak{U}_2$, und $\mathfrak{G}'(2) = {}_2\mathfrak{U} \cdot \mathfrak{Z}$ ist nach unserer Induktionsannahme auflösbar. Weiterhin können wir also $\mathfrak{U}_2' \neq \mathfrak{E}$ annehmen.

[1]) Dieser Teil c) geht wesentlich auf eine Unterhaltung mit Herrn H. WIELANDT zurück.

e) Zunächst betrachten wir den Fall, daß $\mathfrak{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{U}_2)) \lhd \mathfrak{U}$. Sei $X = ZU \in \mathfrak{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{U}_2))$ mit $U \in \mathfrak{U}$ und $E \neq Z \in \mathfrak{Z}$. Dann ist $\mathfrak{Z}(\mathfrak{U}_2)^X < \mathfrak{U}_2 < \mathfrak{U}$, also $\mathfrak{Z}(\mathfrak{U}_2)^Z < \mathfrak{U}^{U^{-1}} = \mathfrak{U}$, woraus $\mathfrak{Z}(\mathfrak{U}_2) < \mathfrak{U}^{Z^{-1}} \cap \mathfrak{U}$ folgt. Wegen der Nilpotenz von $\mathfrak{U}'$ ist $\mathfrak{U}_2'$ elementweise vertauschbar mit ${}_2\mathfrak{U}$ (s. HUPPERT [5]). Daher liegt $\mathfrak{U}_2' \cap \mathfrak{Z}(\mathfrak{U}_2) = \mathfrak{C}$ im Zentrum $\mathfrak{Z}(\mathfrak{U})$ von $\mathfrak{U}$ und ist sicher von $\mathfrak{E}$ verschieden wegen $\mathfrak{U}_2' \neq \mathfrak{E}$. Nun haben wir $\mathfrak{C} \lhd \mathfrak{U}$ und $\mathfrak{C} < \mathfrak{U}^{Z^{-1}} \cap \mathfrak{U}$. Das steht jedoch im Widerspruch zu der Transitivität von $\mathfrak{U}$ auf den Symbolen $2, \ldots, n$.

f) Sei nun $\mathfrak{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{U}_2)) < \mathfrak{U}$. Ist $\mathfrak{G}$ 2-normal, so gilt nach dem Satz von GRÜN (GRÜN [2], ZASSENHAUS [14], S. 135) $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}'(2) \cong \mathfrak{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{U}_2))/\mathfrak{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{U}_2))'(2) \neq \mathfrak{E}$, denn in jeder Untergruppe von $\mathfrak{U}$, deren Ordnung noch durch 2 teilbar ist, läßt sich wegen der 2-Nilpotenz eine echte 2-Faktorgruppe abspalten. Wegen $\mathfrak{Z} < \mathfrak{G}'(2)$ erhalten wir $\mathfrak{G}'(2) = \mathfrak{Z}\,\overline{\mathfrak{U}}$ mit $\overline{\mathfrak{U}} < \mathfrak{U}$. Aus der Induktionsannahme entnehmen wir dann die Auflösbarkeit von $\mathfrak{G}'(2)$.

Ist $\mathfrak{G}$ nicht 2-normal, so gibt es ein $X \in \mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{Z}(\mathfrak{U}_2)^X < \mathfrak{U}_2$, aber $\mathfrak{Z}(\mathfrak{U}_2)^X \neq \mathfrak{Z}(\mathfrak{U}_2)$. Wäre $X \in \mathfrak{U}$, so hätten wir für jedes $C \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{U}_2)$ und mit $X = S\,T$ mit $S \in \mathfrak{U}_2$ und $T \in {}_2\mathfrak{U}$ die Gleichung $X^{-1} C X = T^{-1} C\, T \in \mathfrak{U}_2$, also auch $T^{-1} C\, T C^{-1} \in \mathfrak{U}_2$. Wegen ${}_2\mathfrak{U} \lhd \mathfrak{U}$ gilt aber $T^{-1} C\, T C^{-1} \in {}_2\mathfrak{U}$, also $T C = C\, T$. Daraus folgt $\mathfrak{Z}(\mathfrak{U}_2)^X = \mathfrak{Z}(\mathfrak{U}_2)$ im Widerspruch zu unserer Annahme. Somit ist $X \notin \mathfrak{U}$. Nun erhalten wir $\mathfrak{Z}(\mathfrak{U}_2) < \mathfrak{U}^{X^{-1}} \neq \mathfrak{U}$, und wie bei e) gilt $\mathfrak{C} = \mathfrak{Z}(\mathfrak{U}_2) \cap \mathfrak{U}_2' < \mathfrak{U} \cap \mathfrak{U}^{X^{-1}}$ und $\mathfrak{E} \neq \mathfrak{C} \lhd \mathfrak{U}$, was nicht möglich ist. Also muß $\mathfrak{G}$ doch 2-normal sein, womit der Beweis von Satz 5 abgeschlossen ist.

## Literatur.

[1] BURNSIDE, W.: Theory of groups of finite order. Sec. edit. 1911. — [2] GRÜN, O.: Beiträge zur Gruppentheorie I. J. reine angew. Math. **174**, 1—14 (1935). — [3] HALL, P.: A note on soluble groups. J. London Math. Soc. **3**, 98—105 (1928). — [4] HUPPERT, B.: Über die Auflösbarkeit faktorisierbarer Gruppen. Math. Z. **59**, 1—7 (1953). — [5] HUPPERT, B.: Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen. Math. Z. **60**, 409—434 (1954). — [6] ITÔ, N.: Remarks on factorisable groups. Acta Sci. Math. Szeged **14**, 83—84 (1951). — [7] ITÔ, N.: Note on (*LM*)-groups of finite orders. Kōdai math. Sem. Reports 1951, S. 1—6. — [8] ORE, O.: Contributions to the theory of groups of finite order. Duke Math. J. **5**, 431—460 (1938). — [9] SCHUR, I.: Zur Theorie der einfach transitiven Permutationsgruppen. Sitzgsber. Berl. Akad. **1933**, 598—623. — [10] SPEISER, A.: Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, 3. Aufl. 1937. — [11] SZÉP, J. u. L. RÉDEI: On factorisable groups. Acta Sci. Math. Szeged **13**, 235—238 (1950). — [12] WIELANDT, H.: Zur Theorie der einfach transitiven Permutationsgruppen. Math. Z. **40**, 582—587 (1936). — [13] WIELANDT, H.: Über das Produkt paarweise vertauschbarer nilpotenter Gruppen. Math. Z. **55**, 1—7 (1951). — [14] ZASSENHAUS, H.: Lehrbuch der Gruppentheorie, Bd. I. 1937.

*Tübingen, Mathematisches Institut der Universität.*

*Mathematical Institute, Nagoya University, Chikusa-Ku, Nagoya (Japan).*

*(Eingegangen am 28. Juni 1954.)*

Laugwitz, D.
Math. Zeitschr. Bd. 61, S. 100—118 (1954)

# Differentialgeometrie ohne Dimensionsaxiom.

## I. Tensoren auf lokal-linearen Räumen.

Von

Detlef Laugwitz.

*Einleitung.* Mit einer Note, enthaltend die Herleitung der Fundamentalformeln der Kurventheorie im Raum der über einem Intervall definierten stetigen Funktionen, hat G. Kowalewski [1][1]) im Jahre 1910 eine neue Disziplin der Differentialgeometrie begründet, die Differentialgeometrie der unendlichdimensionalen Mannigfaltigkeiten. In den zwanziger und dreißiger Jahren hat die italienische Schule um G. Vitali die Differentialgeometrie der endlichdimensionalen Untermannigfaltigkeiten des Hilbertschen Raumes gründlich erforscht; ein Teil der Ergebnisse ist in dem Buch von Vitali [1] zusammengefaßt.

Um 1930 begann man sich, angeregt von Fragestellungen der Mechanik der Kontinua, mit der intrinseken Geometrie der Funktionenräume zu befassen. Michal [1], Moisil [1], Conforto und Kawaguchi erweiterten Ergebnisse der Riemannschen Geometrie auf spezielle Funktionenräume. So definierte Moisil im Raume der über $\langle 0, 1\rangle$ stetigen Funktionen ein Linienelement durch

$$ds^2 = \int_0^1 g(\alpha)\,\delta x^2(\alpha)\,d\alpha + \int_0^1\int_0^1 g(x;\alpha,\beta)\,\delta x(\alpha)\,\delta x(\beta)\,d\alpha\,d\beta.$$

Diese Geometrien leiden sehr darunter, daß der Formalismus außerordentlich schwerfällig ist; die Definitionsgleichung des Krümmungstensors erstreckt sich bei manchen Autoren über nahezu eine ganze Seite. Der geometrische Gehalt der unendlichdimensionalen Geometrien tritt besser zutage in der von Michal inaugurierten „abstrakten" Auffassung (Michal [2], [4]; Kerner [1]). Doch sind auch die Bezeichnungen von Michal und Kerner nicht einfach genug, als daß der geometrische Inhalt klar erkennbar wäre. Zudem zeigt eine genauere Analyse, daß Abweichungen von der klassischen Geometrie auftreten, die nur durch die Wahl der Bezeichnungsweise bedingt sind. Außerdem ist der Formalismus zu schwerfällig, als daß neue geometrische Resultate erzielt werden könnten. In der vorliegenden Arbeit wird zunächst eine Bezeichnungsweise eingeführt, die von der klassischen Indexmethode möglichst wenig abweicht.

Wir werden hier die Frage nach dem Aufbau der Differentialgeometrie, und zwar in II. insbesondere der Riemannschen Geometrie ohne Verwendung eines Dimensionsaxioms behandeln. Dies ist etwa in demselben Sinne zu

[1]) Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

verstehen, wie die euklidische Geometrie ohne Verwendung eines Dimensionsaxioms durch die Geometrie des HILBERT-Raumes dargestellt werden kann. Für eine Geometrie ohne Dimensionsaxiom wird man folgende Forderungen aufstellen müssen:

1. Untermannigfaltigkeiten der gleichen algebraisch-analytischen Struktur haben die gleiche geometrische Struktur wie der ursprüngliche Raum.

2. Im Endlichdimensionalen fällt der Begriff der Geometrie mit dem klassischen zusammen.

Das heißt z. B.: Jeder lineare Unterraum eines euklidischen Raumes ist ein euklidischer Raum; im endlichdimensionalen Fall geht die neue Definition des euklidischen Raumes in die klassische über. Beides ist für den HILBERT-Raum erfüllt. Entsprechendes gilt für die affine Geometrie und die topologischen Vektorräume.

Der hier gegebene dimensionsfreie Aufbau der Differentialgeometrie ermöglicht auch die Gewinnung neuer geometrischer Resultate in der Geometrie der unendlichdimensionalen Räume. In § 12 von Teil II werden wir als ein Beispiel für diese Möglichkeit den Beweis dafür bringen, daß unter gewissen Regularitätsvoraussetzungen die Krümmungen in den KOWALEWSKI-FRENETschen Formeln ein vollständiges System unabhängiger Invarianten einer Kurve darstellen. Dies wird gleich im RIEMANNschen Raume gezeigt werden können.

## § 1. Lineare Räume.

Im folgenden bezeichnen wir mit $L$ einen beliebigen Vektormodul (Vektoren $x, \xi, \ldots$) über dem Körper der reellen Zahlen. Jeder Menge $M \subseteq L$ ist ihre lineare Hülle $LH(M)$ zugeordnet als Menge der Linearkomposita aus je endlich vielen Elementen von $M$. Ein Element $x \in L$ heißt linear abhängig von einer Menge $M \subseteq L$, wenn $x \in LH(M)$, anderenfalls linear unabhängig. LÖWIG [1] hat die lineare Dimension $\mathfrak{a}(L)$ eingeführt als kleinstmögliche Mächtigkeit einer Menge $M \subseteq L$ mit $LH(M) = L$[2]). Bezeichnet man als lineare Basis von $L$ jede Menge $B \subseteq L$ mit den Eigenschaften

a) $LH(B) = L$ und

b) Jedes Element von $B$ ist von der Menge der übrigen linear unabhängig,

so gilt nach LÖWIG [1], Satz 1, daß die Mächtigkeit von $B$ gleich $\mathfrak{a}(L)$ ist. Die Existenz einer linearen Basis in $L$ ist z. B. bei HAUSDORFF [1, 295] bewiesen. Jeder Vektor aus $L$ läßt sich eindeutig durch die Vektoren von $B$ linear darstellen. Ein linearer Unterraum von $L$ ist eine Menge $L' \subseteq L$ mit $LH(L') = L'$. Für eine beliebige Menge $M \subseteq L$ ist $\mathfrak{a}(M)$ erklärt als lineare Dimension von $LH(M)$.

Hilfssatz 1.1. *Aus* $M \subseteq M'$ *folgt* $\mathfrak{a}(M) \leq \mathfrak{a}(M')$.

---

[2]) LÖWIG [1] verwendet die Bezeichnungen „affine Dimensionszahl", „affine Basis"; da der Begriff „affin" mehr enthält als rein algebraische Aussagen, soll er hier vermieden werden. Aus ähnlichen Gründen werden wir statt „metrische Dimensionszahl" usw. sagen: topologische Dimensionszahl usw.

Hilfssatz 1.2. *Wenn es in* $M \subseteq L$ $\aleph$ *linear unabhängige Vektoren gibt, dann ist* $\mathfrak{a}(M) \geq \aleph$.

Die Beweise ergeben sich aus der Anwendung der Hilfssätze NT 1 und 2 auf die linearen Hüllen[3]).

Eine Abbildung eines linearen Raumes $L$ in einen zweiten $A$ heißt linear, wenn sie distributiv und von erster Ordnung homogen ist. Die Menge dieser Abbildungen bildet wieder einen linearen Raum (Vektormodul), wenn man die Linearitätsrelationen in der üblichen Weise erklärt. Wegen der linearen Dimension dieses Raumes vergleiche man NT, Hilfssatz 3. Die Abbildungen von $L$ in die Menge der reellen Zahlen heißen Funktionale. Der Raum der linearen Funktionale über $L$, der Dualraum von $L$, hat die lineare Dimension $2^{\mathfrak{a}(L)}$.

Es sei nun in $L$ eine Topologie eingeführt, so daß $L$ dadurch zu einem topologischen Vektorraum im Sinne von BOURBAKI [*1*, p. 1] geworden ist. Dann ist jeder Menge $M$ ihre abgeschlossene lineare Hülle $ALH(M)$ zugeordnet als Menge derjenigen $x \in L$, welche sich durch endliche Linearkombinationen von Vektoren aus $M$ approximieren lassen. Diese Menge ist relativ-abgeschlossen in $L$, braucht aber nicht vollständig zu sein, wenn $L$ selbst nicht vollständig ist. Unter der topologischen Dimensionszahl $\mathfrak{t}(M)$ einer Menge soll dann die kleinstmögliche Mächtigkeit einer Menge $N$ mit $ALH(N) = ALH(M)$ verstanden werden. Es gilt offenbar stets: $\mathfrak{t}(M) \leq \mathfrak{a}(M)$, wobei für endlichdimensionale Räume natürlich die Gleichheit gilt. In unendlichdimensionalen Räumen gilt nicht immer das Gleichheitszeichen (vgl. z.B. NT, Beweis zu Satz 3).

## § 2. Normierte Räume und ihre adjungierten Räume.

Wir werden uns im folgenden im wesentlichen auf spezielle topologische Vektorräume, die „normierten" Räume, beschränken, da nur in diesen ein befriedigender Aufbau der Analysis durchführbar ist. Ein linearer Raum $L$ heißt normiert, wenn in ihm eine Topologie eingeführt ist mit Hilfe eines reellwertigen Funktionals $||x||$ mit

$$||x|| \neq 0 \quad \text{für} \quad x \neq 0, \qquad ||x+y|| \leq ||x|| + ||y||, \qquad ||a \cdot x|| = |a| \cdot ||x||.$$

Diese „Norm" ist dann positiv-definit. Die Topologie ist definiert durch:

$$x_n \to x \quad \text{genau wenn} \quad ||x_n - x|| \to 0.$$

Zwei Normen $||\ ||_1$ und $||\ ||_2$ über $L$ heißen äquivalent, wenn sie dieselbe Topologie in $L$ definieren, und dafür ist notwendig und hinreichend, daß es zwei positive Konstanten $M, m$ gibt mit

$$m \cdot ||x||_1 \leq ||x||_2 \leq M \cdot ||x||_1$$

für alle $x \in L$ (SOBCZYK [*1*, 79]; BOURBAKI [*2*, 43]).

[3]) Mit NT wird der Aufsatz des Verf., Über Normtopologien in linearen Räumen, Arch. der Math. **4**, 455—459 (1953) bezeichnet.

Es ist bekannt (NT), daß jeder lineare Raum $L$ normierbar ist, und die Anzahl der verschiedenen Normtopologien ist für $\mathfrak{a}(L) \geq \aleph_0$ sogar mindestens gleich der Mächtigkeit des Kontinuums.

Im topologischen Produkt $N_1 \times \cdots \times N_m$ endlich vieler normierter Räume ist die übliche Topologie des Produktraums selbst wieder normierbar; die Norm kann durch $\max \{||x_i||_i\}$ definiert werden.

Es sollen jetzt noch zwei Hilfssätze über stetige Abbildungen $F(x)$ eines normierten Raumes in einen anderen bewiesen werden.

Hilfssatz 2.1. *Notwendig und hinreichend für die Stetigkeit von $F(x)$ im Punkte $x_0$ ist: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta(\varepsilon)$, so daß $||F(x) - F(x_0)|| \leq \varepsilon$ für $||x - x_0|| \leq \delta$* [4]).

Beweis. Die Bedingung ist offenbar hinreichend. Ihre Notwendigkeit folgt indirekt: Gäbe es ein $\tilde{\varepsilon} > 0$, so daß es für jedes $n = 1, 2, 3, \ldots$ ein $x_n$ gäbe mit $||x_n - x_0|| \leq \frac{1}{n}$ und $||F(x_n) - F(x_0)|| > \tilde{\varepsilon}$, so ergäbe sich ein Widerspruch zur Stetigkeit, da $x_n \to x_0$.

Hilfssatz 2.2. *Wenn $F(x)$ in einem Innenpunkt $x_0$ des Definitionsbereiches stetig ist, dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine „Kugel" $||x - x_0|| \leq m(\varepsilon)$, so daß $||F(x)|| \leq ||F(x_0)|| + \varepsilon$ für $||x - x_0|| \leq m(\varepsilon)$.*

Beweis. Dies folgt sofort aus dem vorhergehenden Hilfssatz und der Dreiecksungleichung $|||F(x)|| - ||F(x_0)||| \leq ||F(x) - F(x_0)||$.

Notwendig und hinreichend für die Stetigkeit einer linearen Abbildung $X = T(x)$ eines normierten Raumes in einen zweiten ist bekanntlich:

$$||T|| = \sup_{x \neq 0} \frac{||T(x)||}{||x||} = \sup_{||x||=1} ||T(x)|| < \infty.$$

Unter der so definierten Norm bildet die Menge der stetigen (oder „beschränkten") linearen Abbildungen $T$ selbst wieder einen normierten Raum, der sogar vollständig ist, wenn der Bildraum diese Eigenschaft hat.

Aus der Definition folgt $||T(x)|| \leq ||T|| \cdot ||x||$.

Wir führen folgende Bezeichnungskonvention ein:

1. Elemente eines vorgelegten normierten Raumes sollen durch Zeichen aus einer bestimmten, für den Raum charakteristischen Zeichenmenge gekennzeichnet werden. Zeichenmengen sind z. B.:

$$*, \triangle, \times, \square, \bigcirc, \nabla, \ldots$$
$$\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}, \mathrm{IV}, \mathrm{V}, \ldots$$
$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$$
$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \ldots$$
$$a, b, c, d, e, f, \ldots$$

Ferner soll verabredet werden, daß Elemente eines normierten Raumes ihr Zeichen an einer bestimmten Stelle, etwa als oberen oder unteren Index tragen sollen, wobei diese Stelle einheitlich für alle Elemente des Raumes

[4]) Die Norm kann in beiden Räumen durch dasselbe Symbol bezeichnet werden, da die Argumente sich unterscheiden.

festgelegt sein soll. Ein Index dient nicht zur Unterscheidung von Elementen des gleichen Raumes und darf daher in einem Ausdruck (einer Gleichung) zugleich an allen Stellen, an denen er vorkommt, durch einen beliebigen anderen derselben Zeichenmenge ersetzt werden, der vorher noch nicht in diesem Ausdruck (dieser Gleichung) auftrat.

2. Es seien zwei normierte Räume vorgelegt, deren Elemente durch obere Indizes aus zwei verschiedenen Zeichenmengen gekennzeichnet seien. Eine beschränkte lineare Abbildung des ersten Raumes in den zweiten trägt als unteren Index den Index des Urbildes, als oberen Index den Index des Bildes.

Beispiel. Statt $X = T(x)$ schreiben wir z. B. $X^{\Delta} = T_{\mathrm{II}}^{\Delta}\, x^{\mathrm{II}}$. Abbildungen eines Raumes in sich schreiben wir demgemäß z. B. $y^3 = S_1^3\, x^4$. Insbesondere verabreden wir, daß die Identität in einem normierten Raum durch $\delta$ bezeichnet wird (das „Kronecker-Dirac-Symbol"): $x^{\alpha} = \delta_{\beta}^{\alpha}\, x^{\beta}$.

3. Reelle Zahlen tragen keinen freien Index. (Dabei heißt ein oberer oder unterer Index „frei", wenn er im gleichen Ausdruck nicht noch als unterer bzw. oberer Index auftritt.)

Beispiel. Die stetigen linearen Funktionale über einem Raum $\{\xi^i\}$ tragen untere Indizes aus der gleichen Zeichenmenge: $\eta_i$; $\eta_k\, \xi^k$ ist eine Zahl, $\eta_i\, \xi^k = \xi^k\, \eta_i$ dagegen ein linearer Operator mit eindimensionalem Wertebereich.

Aus bezeichnungstechnischen Gründen werden wir von den Zeichenmengen hauptsächlich das kleine griechische und das kleine lateinische Alphabet verwenden; die arabischen Zahlen 1, 2, 3, ... sowie die Buchstaben $m, n$ werden zur Numerierung benutzt und haben keine Bedeutung in der Operationssymbolik.

Vollständige normierte Räume bezeichnen wir wie üblich als BANACH-Räume.

Die Menge der stetigen Linearformen über einem normierten Raume $N$ bildet einen BANACH-Raum, den zu $N$ adjungierten Raum; seine Vollständigkeit folgt aus der Vollständigkeit des normierten Raumes der reellen Zahlen. Dieser adjungierte Raum ist zugleich adjungierter Raum von $\bar{N} = B$, der Vervollständigung von $N$; wir bezeichnen ihn mit $B_1$. Höhere adjungierte Räume erhält man mittels der Mengen der stetigen Multilinearformen in $n$ Elementen aus $B$ und $m$ Elementen aus $B_1$. Diese Multilinearformen werden mit

$$t_{k_1 \dots k_n}^{i_1 \dots i_m}$$

bezeichnet. Als Norm in diesen Multilinearformenmoduln wird man verwenden:

$$\left\| t_{k_1 \dots k_n}^{i_1 \dots i_m} \right\| = \sup_{\|\eta_{i_1}\| = \dots = \|x^{k_n}\| = 1} \left| \eta_{i_1} \dots \varrho_{i_m}\, t_{k_1 \dots k_n}^{i_1 \dots i_m}\, y^{k_1} \dots z^{k_n} \right|.$$

Wenn nichts anderes bemerkt wird, soll $t^{\dots}_{\dots}$ zusätzlich die Eigenschaft haben, daß jeder mit $t^{\dots}_{\dots}$ gebildete Ausdruck, der genau einen freien oberen Index trägt, ein Element von $B$ darstellt. Dies ist im allgemeinen wirklich eine Einschränkung, da es Räume gibt, die nicht „reflexiv" sind, d. h. bei denen sich nicht alle stetigen Linearformen über $B_1$ durch Elemente von

$B$ repräsentieren lassen. Dann wäre man zwar sicher, daß z. B. $t_k^i \xi^k$ eine Linearform über $B_1$ ist, aber sie brauchte nicht notwendig einem Element von $B$ zu entsprechen. Wenn wir aber diese Einschränkung machen, dann bildet die Menge dieser $t_{k_1 \dots k_n}^{i_1 \dots i_m}$ einen BANACH-Raum, den wir mit $B_n^m$ bezeichnen wollen. Diese Räume sind übrigens von mindestens derselben linearen Dimensionszahl wie $B$ bzw. $B_1$, sind also jedenfalls mit $B$ nichttriviale BANACH-Räume. Genauer wollen wir beweisen:

Hilfssatz 2.3.

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}(B) \leq \mathfrak{a}(B^m) \leq 2^{(2^{\mathfrak{a}(B)})} \qquad & (B^m = B_0^m,\ B^1 = B), \\ \mathfrak{a}(B) \cdot \mathfrak{a}(B_1) \leq \mathfrak{a}(B_n^m) \leq 2^{(2^{\mathfrak{a}(B)})}, \qquad & m \cdot n \neq 0, \\ \mathfrak{a}(B_1) \leq \mathfrak{a}(B_n) \leq 2^{\mathfrak{a}(B)}. & \end{aligned}$$

Beweis. Sind $\{\xi_{(\mu)}^i\}$, $\{\eta_k^{(\nu)}\}$ lineare Basen von $B$ bzw. $B_1$, so sind im Falle $m \cdot n \neq 0$ $\xi_{(\mu_1)}^{i_1} \dots \xi_{(\mu_m)}^{i_m} \eta_{k_1}^{(\nu_1)} \dots \eta_{k_n}^{(\nu_n)}$ $\mathfrak{a}(B) \cdot \mathfrak{a}(B_1)$ linear unabhängige Elemente von $B_n^m$. Daraus folgt die Abschätzung nach unten nach Hilfssatz 1.2. Die Abschätzung nach oben ergibt sich nach NT, Hilfssatz 4. In entsprechender Weise folgen die beiden anderen Ungleichungen.

Hilfssatz 2.4. *$B_1$ ist mit $B$ unendlichdimensional. Wenn $B$ separabel ist (d.h. $\mathfrak{t}(B) = \aleph_0$), dann gilt*

$$\mathfrak{a}(B) \leq \mathfrak{a}(B_1) \leq 2^{\mathfrak{a}(B)}.$$

Beweis. Der erste Teil des Satzes ergibt sich sofort: Wäre $B_1$ endlichdimensional, so wäre der zu $B_1$ adjungierte Raum von der gleichen endlichen Dimension, müßte andererseits aber einen zu $B$ isomorphen Teilraum besitzen, was unmöglich ist, da $B$ unendlichdimensional sein sollte. Zum Beweis des zweiten Teiles der Behauptung beachten wir, daß nach NT, Satz 4 $\mathfrak{a}(B)$ und $\mathfrak{a}(B_1)$ normtopologische Invarianten von $B$ sind. Man kann also zu einer äquivalenten Norm in $B$ übergehen, ohne daß ihr Wert sich ändert. Wegen der Separabilität des Raumes gibt es nach CLARKSON [*1*] in jeder Normtopologie eine eigentlich konvexe Norm $|\ |$, d.h. $|\ |$ hat die Eigenschaft, daß aus $|x+y| = |x| + |y|$ die lineare Abhängigkeit von $x$ und $y$ folgt. Dann gibt es zu jedem $\overset{\circ}{y}_i$ mit $|\overset{\circ}{y}| = 1$ höchstens ein $\overset{\circ}{x}^j$ mit $\overset{\circ}{y}_i \overset{\circ}{x}^i = 1$, $|\overset{\circ}{x}| = 1$; denn gäbe es zwei, $\overset{\circ}{x}$ und $\tilde{x}$, dann wäre:

$$2 \leq \overset{\circ}{y}_i (\overset{\circ}{x}^i + \tilde{x}^i) \leq |\overset{\circ}{x}^i + \tilde{x}^i| \leq 2.$$

Daraus ergäbe sich aber wegen der eigentlichen Konvexität von $|\ |$ die lineare Abhängigkeit von $\overset{\circ}{x}$ und $\tilde{x}$, und die Gleichheit dieser beiden Vektoren folgt dann aus $\overset{\circ}{y}_i (\overset{\circ}{x}^i - \tilde{x}^i) = 0$, $\overset{\circ}{y}_i \overset{\circ}{x}^i \neq 0$. Andererseits gibt es bekanntlich (vgl. z. B. BANACH [*1*]) zu jedem $x^i$ mit $|x| = 1$ mindestens ein $y_i$ mit $y_i x^i = 1$ und $|y| = 1$. Also hat man eine eineindeutige Korrespondenz zwischen $B$ und einer Untermenge $U$ von $B_1$, wenn man $x$ zuordnet $|x| \cdot y_i$, wo $y_i$ ein bestimmtes der nach der obigen Zuordnung zu $x/|x|$ gehörigen linearen Funktionale ist. $B_1$ hat also mindestens dieselbe Mächtigkeit wie $B$.

Da $B$ und $B_1$ unendlichdimensionale BANACH-Räume sind, sind ihre linearen Dimensionen nach einem Resultat von MACKEY [*1*, 159] mindestens

gleich der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ des Kontinuums. Also fallen ihre Mächtigkeiten nach LÖWIG [1], Satz 2 mit ihren linearen Dimensionen zusammen, und daraus folgt $\mathfrak{a}(B) \leq \mathfrak{a}(B_1)$.

Die Menge der stetigen linearen Funktionale ist in der Menge aller Funktionale enthalten, und daraus ergibt sich nach Hilfssatz 1.1 und NT, Hilfssatz 3: $\mathfrak{a}(B_1) \leq 2^{\mathfrak{a}(B)}$.

Die beiden zuletzt bewiesenen Hilfssätze zeigen, daß die Räume $B_n^m$ jedenfalls nicht-triviale Vektorräume sind. Wir untersuchen jetzt noch ihre Normen etwas genauer. Für $||T_j^i||$ haben wir zwei Definitionen, je nachdem ob wir $T_j^i$ als lineare Abbildung von $B$ auf sich oder als Bilinearform über $B \times B_1$ auffassen. Wir müssen daher die Äquivalenz der beiden Definitionen zeigen.

Hilfssatz 2.5. $||x^i|| = \max_{\eta_i \neq 0} \frac{|\eta_i x^i|}{||\eta_i||}$.

Beweis. Dies folgt aus der bereits im Beweis zu Hilfssatz 2.4 benutzten Tatsache, daß es zu jedem $\overset{\circ}{x}{}^k \neq 0$ ein $\overset{\circ}{\eta}_{lk}$ gibt mit $||\overset{\circ}{\eta}_{lk}|| = 1$ und $\overset{\circ}{\eta}_{lj} \overset{\circ}{x}{}^j = ||\overset{\circ}{x}{}^j||$. Für alle $\eta_i$ gilt $|\eta_i x^i| \leq ||\eta|| \cdot ||x||$. Die obere Grenze wird wirklich angenommen.

Hilfssatz 2.6. $\sup_{x \neq 0} \frac{||T_k^i x^k||}{||x^k||} = \sup_{||\eta|| \cdot ||x|| \neq 0} \frac{|\eta_i T_k^i x^k|}{||\eta|| \, ||x||}$.

Beweis.

$$\sup \frac{|\eta_i T_k^i x^k|}{||\eta|| \cdot ||x||} = \sup \frac{|\eta_i T_k^i x^k|}{||T_k^i x^k||} \cdot \frac{||T_k^i x^k||}{||\eta_i|| \cdot ||x^k||} \leq \sup \frac{||T_k^i x^k||}{||x^k||}. \quad \text{(Alle Nenner } \neq 0.)$$

Die Umkehrung gilt nach Hilfssatz 2.5.

Die Norm $T_k^i$ kann also auf beide Arten berechnet werden. Man erkennt auf die gleiche Weise, daß Entsprechendes auch für $t_{k_1 \ldots k_n}^{i_1 \ldots i_m}$ gilt. Es ergibt sich die allgemeine Regel:

Die Norm eines beliebigen Ausdrucks ist gleich dem Produkt der Normen seiner Bestandteile oder kleiner als dieses.

Beispiel:

$$||T_{kjh}^i \xi^k g_{rs} t^r f^{jl}|| \leq ||T_{kjh}^i|| \cdot ||\xi^k|| \cdot ||g_{rs}|| \cdot ||t^r|| \cdot ||f^{jl}||.$$

Solche Ausdrücke wie den hier betrachteten $T_{kjh}^i \xi^k g_{rs} t^r f^{jl}$ kann man symbolisch als Produkte auffassen. Sie stellen in unmißverständlicher Weise stetige lineare Abbildungen zwischen höheren adjungierten Räumen dar, im Beispiel zwischen $B^2$ und $B^2$.

Hilfssatz 2.7. *Wenn* $\eta_i(x^i - y^i) = 0$ *für alle* $\eta_i$ *aus* $B_1$, *dann ist* $x^i = y^i$.

Beweis. Wäre nämlich $||x^i - y^i|| \neq 0$, so gäbe es ein $\overset{\circ}{\eta}_i$ mit $||\overset{\circ}{\eta}_i|| = 1$ $\overset{\circ}{\eta}_i(x^i - y^i) = ||x^i - y^i||$, und dies müßte im Gegensatz zur Annahme nach Voraussetzung gleich 0 sein.

In $B_n^m$ ist die Gleichheit wie üblich definiert; zwei Elemente von $B_n^m$ heißen gleich, wenn ihre Differenz die Nullform ist, d.h. für alle Auswahlen von Vektoren aus $B$, $B_1$ verschwindet.

Hilfssatz 2.8. *Notwendig und hinreichend für* $t^{i_1 \dots i_m}_{k_1 \dots k_n} = 0$ *ist:*

$$t^{i_1 \dots i_m}_{k_1 \dots k_n} \xi^{k_\nu} = 0 \qquad (t^{i_1 \dots i_m}_{k_1 \dots k_n} \eta_{i_\mu} = 0)$$

*gilt für alle* $\xi(\eta)$ *und irgendein* $\nu$, $1 \leq \nu \leq n$ $(\mu, 1 \leq \mu \leq m)$.

Beweis. Dies folgt aus der allgemeinen Ungleichung

$$\begin{aligned} &\Big|\overset{(1)}{\eta}_{i_1} \dots \overset{(m)}{\eta}_{i_m} t^{i_1 \dots i_m}_{k_1 \dots k_n} \overset{k_1}{\underset{(1)}{\xi}} \dots \xi^{k_\nu} \dots \overset{k_n}{\underset{(n)}{\xi}}\Big| \\ &\quad \leq \Big|\overset{(1)}{\eta}_{i_1}\Big| \cdot \dots \cdot \Big|\overset{(m)}{\eta}_{i_m}\Big| \cdot \Big|t^{i_1 \dots i_m}_{k_1 \dots k_n} \xi^{k_\nu}\Big| \cdot \Big|\overset{k_1}{\underset{(1)}{\xi}}\Big| \cdot \dots \cdot \Big|\overset{k_n}{\underset{(n)}{\xi}}\Big| \\ &\quad \leq \Big|\overset{(1)}{\eta}_{i_1}\Big| \cdot \dots \cdot \Big|\overset{(m)}{\eta}_{i_m}\Big| \cdot \Big|t^{i_1 \dots i_m}_{k_1 \dots k_n}\Big| \cdot \Big|\xi^{k_\nu}\Big| \cdot \Big|\overset{k_1}{\underset{(1)}{\xi}}\Big| \cdot \dots \cdot \Big|\overset{k_n}{\underset{(n)}{\xi}}\Big|, \end{aligned}$$

deren zweite Hälfte für den Beweis der Notwendigkeit Verwendung findet und deren erster Teil den Beweis dafür ergibt, daß die Bedingung hinreichend ist. Die eingeklammerte Behauptung ergibt sich entsprechend.

Es sollen jetzt noch einige Bemerkungen zur Indexkonvention folgen. Für ihre Deutung im endlichdimensionalen Spezialfall gibt es zwei verschiedene Möglichkeiten. Einmal kann man sagen: Alle Ausdrücke sind nach der Einsteinschen Summationskonvention zu behandeln. Bedeutet $y^\alpha = T^\alpha_k x^k$ eine lineare (hier selbstverständlich stetige) Abbildung eines $n$-dimensionalen linearen Raumes in einen $m$-dimensionalen linearen Raum, so kann man sich $\alpha$ als einen von 1 bis $m$ laufenden Index denken, während über $k$ von 1 bis $n$ summiert wird. Diese Auffassung macht Gebrauch von einem speziellen cartesischen Koordinatensystem. Die andere Deutungsmöglichkeit ist: Die Operationsauffassung wird auch im Endlichdimensionalen beibehalten. In $y^\alpha = T^\alpha_k x^k$ oder $y^* = T^*_1 x^1$ bedeuten $T^\alpha_k$ oder $T^*_1$ also lineare Operatoren. — Für den allgemeinen Fall ist eine sehr zweckmäßige Bezeichnung von Dirac [1] eingeführt worden. Dort wird statt $x^i$ geschrieben $|x\rangle$, statt $y_j$ $\langle y|$, und für $T^i_j$ einfach $T$. Diese Bezeichnung ist der Indexkonvention überlegen, wenn man nur Größen dieser angeführten Arten zu betrachten hat; sie eignet sich auch weit besser als die Indexschreibweise für die Behandlung komplexer Räume. Da wir jedoch in der Differentialgeometrie Größen mit vier und mehr Indizes benötigen werden, erweist sich die Diracsche Schreibweise hier leider als unzureichend.

### § 3. Quadratische Formen und euklidische Normtopologien.

Eine Bilinearform $t_{ik} x^i y^k$ heißt symmetrisch, wenn $t_{ik}(x^i y^k - x^k y^i) = 0$ für alle $x$, $y$ gilt. Da Umbenennung der Indizes erlaubt ist, können wir statt dessen auch sagen:

$$(t_{ik} - t_{ki})\, x^i y^k = 0 \text{ gilt für alle } x, y.$$

Nach der Definition der Gleichheit von Multilinearformen folgt als notwendige und hinreichende Bedingung für die Symmetrie von $t_{ik}$: $t_{ik} = t_{ki}$.

Zu einer Bilinearform $t_{ik}$ gehört eine quadratische Form $t_{ik} x^i x^k$. Eine quadratische Form $t_{ik} x^i x^k$ heißt positiv-definit, wenn $t_{ik} x^i x^k > 0$ für alle $x^i \neq 0$.

Hilfssatz 3.1. *Unter allen Bilinearformen, die zu einer quadratischen Form gehören, gibt es eine symmetrische.*

(Dabei heißen zwei quadratische Formen gleich, wenn sie für alle $x$ gleiche Werte annehmen.)

Beweis. Sei $t_{ik}$ irgendeine zu der quadratischen Form gehörige Bilinearform. Dann ist

$$\tfrac{1}{2}(t_{ik}+t_{ki})\,x^i\,y^k=\tfrac{1}{2}\,t_{ik}(x^i\,y^k+x^k\,y^i)$$

eine zur gleichen quadratischen Form gehörige Bilinearform, welche symmetrisch ist. Damit haben wir, daß es jedenfalls dann eine zur quadratischen Form gehörige symmetrische Bilinearform gibt, wenn es überhaupt eine zugehörige Bilinearform gibt. Diese Existenz ist aber bekannt, wenn sie in jedem dreidimensionalen Unterraum gilt, denn die Bilinearitätsdefinition involviert stets nur einen höchstens dreidimensionalen Unterraum. Im dreidimensionalen Raum kennt man die Existenz aber.

Hilfssatz 3.2. *Aus* $t_{ik}=t_{ki}$ *und* $t_{ik}\,x^i\,x^k=0$ *für alle* $x$ *folgt* $t_{ik}=0$.

Beweis.

$$\begin{aligned}0&=t_{ik}(x^i+y^i)\,(x^k+y^k)=t_{ik}(x^i+y^i)\,x^k+t_{ik}(x^i+y^i)\,y^k\\&=t_{ik}\,x^i\,x^k+t_{ik}\,y^i\,x^k+t_{ik}\,x^i\,y^k+t_{ik}\,y^i\,y^k=0+2t_{ik}\,x^i\,y^k+0.\end{aligned}$$

Jede beschränkte Bilinearform $t_{ik}$ vermittelt eine stetige lineare Abbildung von $B$ in $B_1$. Über die Umkehrbarkeit dieser Abbildung sollen jetzt drei Sätze bewiesen werden.

Satz 3.1. *Es sei* $g_{ik}\in B_2$ *symmetrisch, und die zugehörige quadratische Form sei positiv-definit. Dann ist hinreichend für die Umkehrbarkeit der Abbildung* $g_{ik}x^k=u_i$, *daß* $g_{ik}x^i\,x^k$ *„gleichmäßig" positiv-definit ist:*
$g_{ik}x^i\,x^k\geq m\cdot\|x^k\|^2$ *gilt für alle* $x$ *mit einheitlichem* $m>0$.

Beweis. Es gilt also $m^{\frac{1}{2}}\cdot\|x\|\leq\{x\}\leq\|g_{ik}\|^{\frac{1}{2}}\cdot\|x\|$, wobei $\{x\}^2$ für $g_{ik}\,x^i\,x^k$ gesetzt ist. Die Normen $\{\}$ und $\|\,\|$ gehören also derselben Normtopologie an, und unter $\{\}$ ist $B$ ein HILBERT-Raum mit dem Skalarprodukt $g_{ik}\,x^i\,y^k$. Da die Stetigkeit eines linearen Funktionals beim Übergang zu einer äquivalenten Norm erhalten bleibt, können wir die Umkehrbarkeit der Abbildung $g_{ik}$ auch bezüglich der HILBERT-Norm $\{\}$ diskutieren. Nach einem bekannten Satz über den HILBERT-Raum ist dann aber jedes lineare Funktional $u_i$ eindeutig darstellbar in der Form $u_i=g_{ik}\,x^k$. Die Umkehrung ist also eindeutig und linear, und die Bildmenge der Abbildung $g_{ik}$ fällt mit $B_1$ zusammen. Wir zeigen noch die Stetigkeit der Umkehrung:

$$\|g_{ik}\,x^i\|=\sup_{y\neq 0}\frac{|g_{ik}\,x^i\,y^k|}{\|y^k\|}=\sup_{y\neq 0}\frac{\{x\}\cdot\{y\}}{\|y\|}\geq m^{\frac{1}{2}}\{x\}\geq m\,\|x\|.$$

(Hierbei wurde von der SCHWARZschen Ungleichung

$$|g_{ik}\,x^i\,y^k|\leq\{x\}\cdot\{y\}$$

Gebrauch gemacht; die Gleichheit gilt bei linearer Abhängigkeit von $x$ und $y$. Die Ungleichung ergibt sich sehr einfach aus der Bemerkung, daß sie in dem zweidimensionalen, von $x$ und $y$ aufgespannten Raum bekannt ist.)

Dieser Satz ist auf etwas umständlicherem Wege in einem Spezialfall von KERNER [1] bewiesen worden.

Satz 3.2. *Eine positiv-definite quadratische Form* $g_{ik}\,x^i\,x^k$ $(g_{ik}=g_{ki})$, *welche eine lineare topologische Abbildung zwischen* $B$ *und* $U\subseteq B_1$ *vermittelt* $(u_i=g_{ik}\,x^k)$, *liefert eine zur ursprünglichen äquivalente Norm* $\{x\}=(g_{ik}\,x^i\,x^k)^{\frac{1}{2}}$ *in* $B$. *Es gilt* $U=B_1$.

Beweis. Wegen $||g_{ik}||<\infty$ gilt $\{x\}^2\leqq||g_{ik}||\cdot||x||^2$; damit ist die eine Hälfte der Ungleichung bereits bewiesen, die für die topologische Äquivalenz von $\{\}$ und $||\,||$ charakteristisch ist. Die andere Hälfte folgt so ($G$ bezeichnet die Umkehrung von $g_{ik}$; die Operationskonvention kann hier zunächst nicht angewendet werden, da noch nicht bekannt ist, ob $U$ mit $B_1$ zusammenfällt):

$$||x^i||\leq||G||\cdot||u_j||=||G||\cdot||g_{jk}\,x^k||=||G||\cdot\sup_{y\neq 0}\frac{|g_{ik}\,x^k\,y^i|}{||y||}.$$

Auf der rechten Seite wird wiederum die SCHWARZsche Ungleichung angewendet. Damit erhält man:

$$||x^i||\leq||G||\cdot\{x^i\}\cdot\sqrt{||g_{ik}||}.$$

Die Äquivalenz der beiden Normen $\{\}$ und $||\,||$ ist damit bewiesen:

$$\frac{1}{\sqrt{||G||\cdot||g_{ik}||}}\,||x^i||\leq\{x^i\}\leq\sqrt{||g_{ik}||}\cdot||x^i||.$$

$U=B_1$ folgt dann aus dem vorhergehenden Satz.

Beide Sätze lassen sich zusammenfassen:

Satz 3.3. *Notwendig und hinreichend dafür, daß es in einem* BANACH-*Raum* $B$ *positiv-definite quadratische Formen* $g_{ik}\,x^i\,x^k$ $(g_{ik}=g_{ki})$ *gibt, welche topologische lineare Abbildungen* $g_{ik}\,x^i$ *zwischen* $B$ *und* $U\subseteq B_1$ *vermitteln, ist die Euklidizität der Normtopologie von* $B$. *Es ist notwendig* $U=B_1$.

(In NT ist eine Normtopologie euklidisch genannt worden, wenn sie sich durch eine aus einem Skalarprodukt hervorgehende Norm realisieren läßt.)

Da ein Raum genau dann euklidisch ist, wenn seine Vervollständigung ein HILBERT-Raum ist, kann man diesen Satz etwas allgemeiner auch so formulieren:

Satz 3.3′. *Eine Normtopologie in einem linearen Raum* $L$ *ist genau dann euklidisch, wenn es eine topologische lineare Abbildung* $g_{ik}\,x^i$ *zwischen dem Raum und einem Unterraum* $U$ *des adjungierten Raumes gibt* $(g_{ik}=g_{ki})$, *so daß* $g_{ik}\,x^i\,x^k$ *positiv-definit ist.*

Es ist hierbei übrigens wesentlich, daß die Topologie als normierbar vorausgesetzt wurde. In allgemeinen topologischen Vektorräumen ist Satz 3.3′ nicht wahr.

## § 4. Differentialrechnung in normierten Räumen.

Nach FRÉCHET [1] definieren wir: Eine Abbildung $X=F(x)$ einer offenen Menge $M$ eines normierten Raumes $N$ in einen BANACH-Raum $B$ heißt im Punkte $\mathring{x}\in M$ differenzierbar, wenn es eine beschränkte lineare Abbildung $L$ von $N$ in $B$ gibt, so daß

$$F(\mathring{x}+\delta x)-F(\mathring{x})=L(\delta x)+o(\delta x)$$

für alle $\delta x$ mit $(x+\delta x)\in M$ gilt. $\left(o(\delta x)\right.$ ist ein Vektorfeld mit der Eigenschaft $\left.\lim_{||\delta x||\to 0}\frac{o(\delta x)}{||\delta x||}=0.\right)$

Der Operator $L$ heißt FRÉCHETsche Ableitung von $F$ an der Stelle $\mathring{x}$ und soll hier mit $L = \frac{\delta F(\mathring{x})}{\delta x}$ bezeichnet werden. Er ist eindeutig bestimmt. Gelegentlich werden wir uns der in § 2 eingeführten Indizesschreibweise bedienen und für das FRÉCHETsche Differential schreiben:

$$\delta F^{\alpha} = \frac{\delta F^{\alpha}(\mathring{x})}{\delta x^{i}} \delta x^{i}.$$

FRÉCHET [1] hat bereits eine Kettenregel bewiesen (wir benutzen abweichend von FRÉCHET die hier verwendete Schreibweise):

Wenn $F(x)$ eine Abbildung von $M \subseteq N$ auf $M' \subseteq B$ ist, und $\Theta(X)$ eine Abbildung von $M'' \subseteq M'$ in einen BANACH-Raum $B'$, dann ist $\Phi(x) = \Theta(F(x))$ in $x = \mathring{x}$ differenzierbar, wenn $\frac{\delta F(\mathring{x})}{\delta x}$ und $\frac{\delta \Theta(F(\mathring{x}))}{\delta X}$ existieren, und es gilt:

$$\frac{\delta \Phi(\mathring{x})}{\delta x} = \frac{\delta \Theta(F(\mathring{x}))}{\delta X} \frac{\delta F(\mathring{x})}{\delta x}.$$

Wenn $F(x)$ an der Stelle $x = \mathring{x}$ differenzierbar ist, dann gilt

$$\frac{\delta F^{\alpha}(\mathring{x})}{\delta x^{i}} \delta x^{i} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(\mathring{x} + \varepsilon \delta x) - F(\mathring{x})}{\varepsilon}.$$

Denn

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{o(\varepsilon \delta x)}{\varepsilon} = \| \delta x \| \lim_{\varepsilon \cdot \delta x \to 0} \frac{o(\varepsilon \delta x)}{\varepsilon \delta x} = 0.$$

Dies ist die GÂTEAUXsche Berechnungsweise für das FRÉCHETsche Differential.

Aus der Definition ergibt sich, daß eine in $x = \mathring{x}$ differenzierbare Funktion daselbst stetig ist.

Außer der Kettenregel von FRÉCHET werden wir noch einige weitere Hilfssätze benötigen.

Hilfssatz 4.1. *(Partielle Differentiation.) Ist $\varphi(x, X)$ eine Funktion, die in offenen Mengen zweier normierter Räume $\{x\}$ und $\{X\}$ definiert ist, und bezeichnen wir mit $\Omega = (x, X)$ die Elemente des topologischen Produkts, so ist $\psi(\Omega) = \varphi(x, X)$ differenzierbar an der Stelle $\mathring{\Omega} = (\mathring{x}, \mathring{X})$, wenn die „partiellen Ableitungen" $\frac{\delta \varphi(\mathring{x}, \mathring{X})}{\delta x}$ und $\frac{\delta \varphi(\mathring{x}, \mathring{X})}{\delta X}$ existieren (bei festem $X = \mathring{X}$ bzw. $x = \mathring{x}$ zu nehmen), und wenn eine von diesen partiellen Ableitungen in einer Umgebung von $\mathring{x}$ bzw. $\mathring{X}$ stetig ist. Es gilt mit $\delta\Omega = (\delta x, \delta X)$:*

$$(*) \qquad \frac{\delta \psi(\mathring{\Omega})}{\delta \Omega} \delta \Omega = \frac{\delta \varphi(\mathring{x}, \mathring{X})}{\delta x} \delta x + \frac{\delta \varphi(\mathring{x}, \mathring{X})}{\delta X} \delta X.$$

Beweis. Existieren die partiellen Ableitungen, und ist etwa $\frac{\delta \varphi(\mathring{x}, X)}{\delta x}$ stetig in $X$ in einer Umgebung von $\mathring{X}$, so gilt:

$$\varphi(\mathring{x} + \delta x, \mathring{X} + \delta X) - \varphi(\mathring{x}, \mathring{X} + \delta X) = \frac{\delta \varphi(\mathring{x}, \mathring{X} + \delta X)}{\delta x} \delta x + o(\delta x)$$

$$\varphi(\mathring{x}, \mathring{X} + \delta X) - \varphi(\mathring{x}, \mathring{X}) = \frac{\delta \varphi(\mathring{x}, \mathring{X})}{\delta X} \delta X + o(\delta X).$$

Also

$$\begin{aligned}\psi(\overset{\circ}{\Omega}+\delta\Omega)-\psi(\overset{\circ}{\Omega}) &= \frac{\delta\varphi(\overset{\circ}{x},\overset{\circ}{X}+\delta X)}{\delta x}\,\delta x+\frac{\delta\varphi(\overset{\circ}{x},\overset{\circ}{X})}{\delta X}\,\delta X+o(\delta x)+o(\delta X)\\ &= \frac{\delta\varphi(\overset{\circ}{x},\overset{\circ}{X})}{\delta x}\,\delta x+o(\delta\Omega)+\frac{\delta\varphi(\overset{\circ}{x},\overset{\circ}{X})}{\delta X}\,\delta X+o(\delta x)+o(\delta X)\\ &= \frac{\delta\varphi(\overset{\circ}{x},\overset{\circ}{X})}{\delta x}\,\delta x+\frac{\delta\varphi(\overset{\circ}{x},\overset{\circ}{X})}{\delta X}\,\delta X+o(\delta\Omega).\end{aligned}$$

Denn es ist

$$\lim_{|\delta\Omega|\to 0}\frac{||o(\delta x)+o(\delta X)||}{||\delta\Omega||}\leq\lim_{|\delta\Omega|\to 0}\frac{||o(\delta x)||+||o(\delta X)||}{||\delta x||+||\delta X||}\leq\lim_{|\delta\Omega|\to 0}\left\{\frac{||o(\delta x)||}{||\delta x||}+\frac{||o(\delta X)||}{||\delta X||}\right\}=0.$$

Umgekehrt gilt, daß aus der Existenz von $\frac{\delta\psi}{\delta\Omega}$ die Existenz von $\frac{\delta\varphi}{\delta x}$, $\frac{\delta\varphi}{\delta X}$ und die Gleichung (*) folgen; man braucht für $\delta\Omega$ nur $(0,\delta X)$ bzw. $(\delta x,0)$ einzusetzen und die Linearität im Zuwachs zu beachten.

Hilfssatz 4.2. *(Produktregel.) $A^\alpha_k(x)\,\xi^k(x)$ ist differenzierbar, wenn $A^\alpha_k$ und $\xi^k$ differenzierbar sind, und es gilt:*

$$\delta(A^\alpha_k\xi^k)=(\delta A^\alpha_k)\,\xi^k+A^\alpha_k\,\delta\xi^k.$$

Beweis. Wir betrachten $A^\alpha_k(x)\,\xi^k(x)$ als eine Funktion von $x$ und $\xi(x)$ und verwenden die partielle Differentiation und die Kettenregel; außerdem ist zu beachten, daß $\delta(L\,x)=L(\delta x)$ für konstante lineare Operatoren $L$ gilt. Damit ergibt sich:

$$\frac{\delta\{A^\alpha_k(x)\,\xi^k(x)\}}{\delta x^N}\,\delta x^N=\frac{\delta A^\alpha_k}{\delta x^N}\,\xi^k\,\delta x^N+A^\alpha_k\,\delta\xi^k=\left\{\frac{\overset{\alpha}{k}}{\delta x^N}\,\xi^k+A^\alpha_\lambda\,\frac{\delta\xi^k}{\delta x^N}\right\}\delta x^N.$$

Das ist die Behauptung.

Korollar 1. *(Allgemeine Produktregel.) Das Differential bzw. die Ableitung eines Elementes von $B^m_n$, welches als ein Aggregat aus Elementen von adjungierten Räumen gegeben ist, erhält man, indem man je ein Glied durch sein Differential bzw. seine Ableitung ersetzt und alle so entstehenden Ausdrücke addiert.*

Korollar 2. *(Partielle Integration.) Es seien $\eta_i(t)$ und $\xi^i(t)$ differenzierbare Funktionen der reellen Variablen $t$. Dann gilt*

$$\int_{t_0}^{t_1}\dot{\xi}^i(t)\,\eta_i(t)\,dt+\int_{t_0}^{t_1}\xi^i(t)\,\dot{\eta}_i(t)\,dt=[\eta_i\,\xi^i]_{t_0}^{t_1}\qquad\left(\cdot\ \text{für}\ \frac{d}{dt}\right).$$

Hilfssatz 4.3. *(„Schwacher" Mittelwertsatz der Differentialrechnung.) Wenn $F(x)$ stetig differenzierbar ist für alle $x+t\cdot\delta x$, $0\leq t\leq 1$, dann gilt:*

$$||F(x+\delta x)-F(x)||\leq\max_{0\leq\vartheta\leq 1}\left\|\frac{\delta F(x+\vartheta\,\delta x)}{\delta x}\right\|\cdot||\delta x||.$$

Beweis. Seien die Argumente $x$ zunächst reelle Zahlen $t$. (Für deren Differentiale behalten wir die Schreibweise $dt$ bei.) Dann gilt, wenn $\eta$ ein beliebiges Element des zum Bildraum adjungierten Raumes ist, für die Funktion $\eta\,F(t)$ der gewöhnliche Mittelwertsatz der Differentialrechnung, da es

sich um eine reellwertige Funktion der reellen Variablen $t$ handelt:

$$\eta F(t_0 + dt) - \eta F(t_0) = \eta \frac{\delta F(t_0 + \vartheta_\eta\, dt)}{dt}\, dt.$$

Da Entsprechendes für alle $\eta$ gilt, folgt sofort nach Hilfssatz 2.5:

$$\|F(t_0 + dt) - F(t_0)\| \leq \max_{0 \leq \vartheta \leq 1} \left\| \frac{\delta F(t_0 + \vartheta\, dt)}{dt} \right\| \cdot |dt|.$$

Wenn die Argumentmenge einem normierten Raum entstammt, ergibt sich der Beweis durch Zurückführung auf den bereits betrachteten Spezialfall; man braucht dazu nur $F(x + t \cdot \delta x) = H(t)$, $t_0 = 0$, $dt = 1$ zu setzen und die FRÉCHETsche Kettenregel anzuwenden:

$$\|F(x + \delta x) - F(x)\| = \|H(0 + 1) - H(0)\|$$
$$\leq \max_{0 \leq \vartheta \leq 1} \left\| \frac{\delta H(\vartheta)}{dt} \right\| = \max_{0 \leq \vartheta \leq 1} \left\| \frac{\delta F(x + \vartheta\, \delta x)}{\delta x}\, \delta x \right\|.$$

Hilfssatz 4.4. *Eine in einer Umgebung von $x = \mathring{x}$ stetig differenzierbare Funktion genügt in einer offenen Kugel um $\mathring{x}$ einer* LIPSCHITZ*-Bedingung*

$$\|F(x) - F(\tilde{x})\| \leq L \cdot \|x - \tilde{x}\|.$$

Beweis. Da $\frac{\delta F(x)}{\delta x}$ in einer Umgebung von $\mathring{x}$ stetig ist, gibt es in einer abgeschlossenen Kugel um $\mathring{x}$ eine obere Schranke $L$ für $\frac{\delta F(x)}{\delta x}$ (Hilfssatz 2.2). Nach Hilfssatz 4.3 ergibt sich dann die Behauptung für das offene Innere der Kugel, da dieses konvex ist.

Hilfssatz 4.5. *(Fundamentallemma der Variationsrechnung.) Wenn $\int_{t_0}^{t_1} g_i(t)\, \xi^i(t)\, dt = 0$ für alle $\xi^i(t)$ mit $\xi^i(t_0) = \xi^i(t_1) = 0$ gilt, so ist $g_i(t) = 0$ für alle $t$.*

Beweis. Setzen wir speziell $\xi^i(t) = f(t) \cdot \xi^i$ mit beliebigen $\xi^i$, $f(t)$ $[f(t_0) = f(t_1) = 0]$, so ist $\int_{t_0}^{t_1} (g_i(t)\, \xi^i)\, f(t)\, dt = 0$. Nach dem klassischen (eindimensionalen) Fundamentallemma folgt $g_i(t)\, \xi^i = 0$, und da $\xi^i$ beliebig war, ergibt sich die Behauptung.

Hilfssatz 4.6. *(Vertauschbarkeit der Differentiationsreihenfolge)* [5]. *Wenn die zweite Ableitung von $F(x)$ in $x = \mathring{x}$ eine stetige Funktion von $x$ ist, dann gilt:*

$$\frac{\delta^2 F(\mathring{x})}{\delta x^i\, \delta x^k}\, \delta x^i\, dx^k = \frac{\delta^2 F(\mathring{x})}{\delta x^k\, \delta x^i}\, \delta x^i\, dx^k \quad \text{für alle} \quad \delta x, dx.$$

Beweis. Wenn der Satz nicht richtig wäre, dann gäbe es ein Paar $\delta x$, $dx$ mit

$$\Phi^\alpha_{ik}(\mathring{x})\, \delta x^i\, dx^k \neq 0; \qquad \Phi^\alpha_{ik}(x) = \frac{\delta^2 F^\alpha(x)}{\delta x^i\, \delta x^k} - \frac{\delta^2 F^\alpha(x)}{\delta x^k\, \delta x^i}.$$

Dann hätte man die Existenz eines linearen Funktionals $\eta_\alpha$ mit

$$(**) \qquad \eta_\alpha \Phi^\alpha_{ik}(\mathring{x})\, \delta x^i\, dx^k \neq 0.$$

[5]) Dieser Satz ist von KERNER [2] unter Heranziehung des Integralbegriffs bewiesen worden.

Wir betrachten jetzt die reellwertige Funktion $g$ der beiden reellen Variablen $h, k$:

$$g(h,k) = \eta_\alpha F^\alpha(\overset{\circ}{x} + h\,\delta x + k\,dx).$$

Nach der GÂTEAUX-Berechnungsweise für das FRÉCHETsche Differential gilt:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial h\,\partial k}\Big|_{h,k} = \eta_\alpha \frac{\delta^2 F^\alpha(\overset{\circ}{x} + h\,\delta x + k\,dx)}{\delta x^i\,\delta x^k}\,\delta x^i\,dx^k.$$

Aber dies ist in $h, k = 0, 0$ eine stetige Funktion von $h, k$, also gilt:

$$0 = \frac{\partial^2 g}{\partial h\,\partial k}\Big|_{0,0} - \frac{\partial^2 g}{\partial k\,\partial h}\Big|_{0,0} = \eta_\alpha \Phi^\alpha_{ik}(\overset{\circ}{x})\,\delta x^i\,dx^k.$$

Das steht im Widerspruch zur Gleichung (**).

Korollar 1. *Bei Stetigkeit der gemischten Ableitungen einer Funktion mehrerer Variabler ist die Differentiationsreihenfolge vertauschbar.*

Denn man braucht die Variablenräume nur zu ihrem Produktraum zusammenzufassen und Hilfssatz 4.6 anzuwenden.

Hilfssatz 4.7. (EULERS *Formel für homogene Funktionen.*) *Wenn* $F(a \cdot x) = a^n \cdot F(x)$ *für alle* $x \in N$ *und alle reellen* $a$ *gilt, dann ist*

$$\frac{\delta F(x)}{\delta x^i}\,x^i = n \cdot F(x).$$

Der Beweis läßt sich sinngemäß aus dem Endlichdimensionalen übernehmen (z. B. COURANT, Diff.- u. Int.-R. II, 92).

Hilfssatz 4.8. (EULERsche *Differentialgleichung.*) $F(x, \dot{x})$ *sei eine zweimal stetig differenzierbare, reellwertige Funktion seiner beiden Argumente. Dann genügt jede Lösung der Variationsaufgabe*

$$\delta I = \delta \int_{t_0}^{t_1} F(x, \dot{x})\,dt = 0; \qquad x(t_0) = x(t_1) = 0$$

*der Differentialgleichung*

$$[I]_x = \frac{\delta F}{\delta x^i} - \frac{d}{dt}\frac{\delta F}{\delta \dot{x}^i} = 0$$

*und umgekehrt.*

Beweis. Aus der GÂTEAUX-Berechnungsweise für das Differential ergibt sich

$$0 = \delta I = \int_{t_0}^{t_1} \delta F\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \left\{\frac{\delta F}{\delta x^i}\,\delta x^i + \frac{\delta F}{\delta \dot{x}^i}\,\delta \dot{x}^i\right\} dt, \qquad \delta \dot{x}^i = \frac{d}{dt}\,\delta x^i.$$

Daraus erhält man durch partielle Integration (Hilfssatz 4.2, Korollar 2) wegen $\delta x(t_0) = \delta x(t_1) = 0$:

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} \left\{\frac{\delta F}{\delta x^i} - \frac{d}{dt}\frac{\delta F}{\delta \dot{x}^i}\right\} \delta x^i\,dt.$$

Nach dem Fundamentallemma (Hilfssatz 4.5) ergibt sich die erste Behauptung, die zweite folgt unmittelbar.

## § 5. Der lokal-lineare Raum und die Definition der Vektoren[6]).

Ein topologischer Raum heißt $T$-lokal-linear, wenn es eine indizierte Familie von offenen Mengen $\{V_j, j \in J\}$ gibt, welche den Raum völlig überdecken, so daß $V_j$ für jedes $j \in J$ durch einen Homöomorphismus $\psi_j$ aus einer offenen Menge $E_j$ des topologischen Vektorraums $T$ hervorgeht. Die Abbildungen $\psi_j^{-1}$ heißen ein Koordinatensystem $S$. Ein Koordinatensystem heißt von der Klasse $r$, wenn die Abbildungen $\psi_j^{-1}\psi_k$ von $\psi_k^{-1}(V_k \cap V_j)$ in $\psi_j^{-1}(V_k \cap V_j)$ $r$-mal stetig differenzierbar sind; dabei wird vorausgesetzt, daß in $T$ eine Definition der Differenzierbarkeit vorliegt. Zwei Koordinatensysteme $S$, $S'$ heißen $r$-äquivalent, wenn die zusammengesetzten Familien $\{V_j, V_k'\}$, $\{\psi_j, \psi_k'\}$ ein Koordinatensystem der Klasse $r$ bilden. Ein $T$-lokal-linearer Raum der Klasse $r$ ist ein $T$-lokal-linearer Raum zusammen mit einer $r$-Äquivalenzklasse von Koordinatensystemen.

Wir nehmen in dieser Arbeit an, daß $T$ ein normierbarer topologischer Vektorraum sei. Es soll zunächst der klassische Aufbau der Tensorrechnung auf lokal-lineare Räume der Klasse $r$ ($r \geqq 1$) erweitert werden. (Wir schreiben an Stelle der $\psi_j^{-1}$ usw. jetzt wieder $x$ für die Koordinaten.)

Ist $\bar{x} = \bar{x}(x)$ eine Koordinatentransformation, d. h. ein Übergang von einem Koordinatensystem der $r$-Äquivalenzklasse zu einem anderen in der Umgebung eines Punktes $P$, der in einer offenen Umgebung dieses Punktes durch eine Funktion mit Definitions- und Wertebereich in $T$ beschrieben werden kann, so hat man wegen $r \geqq 1$:

$$\delta \bar{x}^i = \frac{\delta \bar{x}^i}{\delta x^k}\, \delta x^k \quad \text{und} \quad \delta x^k = \frac{\delta x^k}{\delta \bar{x}^j}\, \delta \bar{x}^j.$$

Die Umkehrung von $\bar{x} = \bar{x}(x)$ bezeichnen wir dabei mit $x = x(\bar{x})$. Nach der FRÉCHETschen Kettenregel hat man:

$$\frac{\delta \bar{x}^i}{\delta x^k}\,\frac{\delta x^k}{\delta \bar{x}^j} = \frac{\delta x^i}{\delta \bar{x}^k}\,\frac{\delta \bar{x}^k}{\delta x^j} = \delta_j^i,$$

wobei $\delta_k^i$ das in § 2 eingeführte Symbol für den Einheitsoperator ist. Um die in § 4 angegebenen Resultate der Differentialrechnung verwenden zu können, wollen wir jetzt noch die Vollständigkeit des Koordinatenraums verlangen. Dieser kann also als ein BANACH-Raum $B$ aufgefaßt werden.

Jetzt betrachten wir ein beliebiges Koordinatensystem $x$ in der Umgebung eines beliebigen, aber fürs erste festgehaltenen Punktes $P$ (Koordinate $x$). Dann bilden wir für alle $\xi \in B$ und alle Koordinatentransformationen $\bar{x}(x)$

$$\bar{\xi}^i = \frac{\delta \bar{x}^i(x)}{\delta x^k}\, \xi^k.$$

Wir nennen die vermöge dieser linearen Homöomorphismen zwischen $B$ und $B$ erzeugten $\bar{\xi}$ die Koordinatendarstellungen des im $x$-Koordinatensystem

[6]) Im ersten Teil dieses Paragraphen lehnen wir uns in der Formulierung möglichst eng an die Darstellung für den endlichdimensionalen Fall bei STEENROD, The topology of fibre bundles, 20—21 an; dadurch soll deutlich werden, daß es sich hier um eine echte Verallgemeinerung der klassischen Geometrie handelt.

durch $\xi$ dargestellten kontravarianten Vektors. Die Menge der kontravarianten Vektoren läßt sich als linearer topologischer Raum auffassen, da man die Linearitätsrelationen und die Topologie von irgendeiner Koordinatendarstellung übernehmen kann. Da $\frac{\delta \bar{x}}{\delta x}$ und $\frac{\delta x}{\delta \bar{x}}$ beschränkte lineare Abbildungen von $B$ auf sich sind, sind diese Definitionen unabhängig von der speziellen Wahl der Darstellung. Diesen Raum der kontravarianten Vektoren bezeichnen wir als den Tangentialraum $\mathfrak{T}^1(P)$ im Punkte $P$. Er ist zu $B$ linear homöomorph.

In entsprechender Weise führt man den Tangentialraum $\mathfrak{T}_1(P)$ der kovarianten Vektoren ein, die durch Elemente $\eta_i$ von $B_1$ dargestellt werden, wobei für diese Koordinatendarstellungen der kovarianten Vektoren das Transformationsgesetz gelten soll:

$$\bar{\eta}_i = \frac{\delta x^k}{\delta \bar{x}^i} \eta_k .$$

$\mathfrak{T}_1(P)$ ist zu $B_1$ linear homöomorph.

Als Invarianten bezeichnet man reellwertige Funktionen (Funktionale) $\varphi(x)$ mit $\overline{\varphi}(\bar{x}) = \varphi(x)$. Für den Zusammenhang zwischen Invarianten und Vektoren gelten einige oft gebrauchte Regeln:

Hilfssatz 5.1. *Das Produkt eines kovarianten und eines kontravarianten Vektors im selben Punkte ist eine Invariante.*

Beweis.

$$\bar{\eta}_i \bar{\xi}^i = \frac{\delta x^k}{\delta \bar{x}^i} \frac{\delta \bar{x}^i}{\delta x^j} \xi^j \eta_k = \delta_j^k \xi^j \eta_k = \eta_i \xi^i .$$

Es gelten auch die beiden möglichen Umkehrungen:

Hilfssatz 5.2. *Ergibt die Anwendung der Darstellungen $\eta_j$ einer linearen Funktionaloperation auf die Darstellungen jedes kontravarianten Vektors eine Invariante, so stellt $\eta_j$ einen kovarianten Vektor dar.*

Beweis. Es ist also vorausgesetzt:

$$\bar{\eta}_j \bar{\xi}^j = \bar{\eta}_j \frac{\delta \bar{x}^j}{\delta x^k} \xi^k = \eta_k \xi^k \quad \text{für alle} \quad \xi^k .$$

Daraus ergibt sich unter Anwendung der Gleichheitsdefinition für lineare Funktionale, da $\xi^k$ den ganzen Raum $B$ durchläuft:

$$\bar{\eta}_j \frac{\delta \bar{x}^j}{\delta x^k} = \eta_k .$$

Dies kann von rechts mit $\frac{\delta x^k}{\delta \bar{x}^l}$ multipliziert werden, und daraus ergibt sich die Behauptung.

Hilfssatz 5.3. *Ergibt die Anwendung der Darstellungen jedes kovarianten Vektors auf die Darstellungen eines geometrischen Objekts, welche in $B$ liegen, stets eine Invariante, so ist das geometrische Objekt ein kontravarianter Vektor.*

(Ein geometrisches Objekt ist eine Größe, deren Koordinatendarstellungen einem Transformationsgesetz unterliegen.)

Beweis. Es gilt also $\bar{\eta}_j \bar{\xi}^j = \eta_i \frac{\delta x^i}{\delta \bar{x}^k} \bar{\xi}^k = \eta_i \xi^i$ für alle $\eta_i$. Nach Hilfssatz 2.7 folgt die Behauptung unter Beachtung der Tatsache, daß die Koordinatendarstellungen aller kovarianten Vektoren in jedem Koordinatensystem ganz $B_1$ durchlaufen.

## § 6. Tensorrechnung in lokal-linearen Räumen.

Für den zugrunde liegenden geometrischen Raum gelten die Voraussetzungen aus § 5.

Definition 1. Ein Element $T^{i_1 \dots i_m}_{k_1 \dots k_n} \in B^m_n$ heißt Koordinatendarstellung eines Elementes von $\mathfrak{T}^m_n(P)$, wenn es sich beim Übergang zu einem neuen Koordinatensystem $\bar{x}(x)$ nach folgendem Gesetz transformiert:

$$\bar{T}^{i_1 \dots i_m}_{k_1 \dots k_n} = \frac{\delta \bar{x}^{i_1}}{\delta x^{l_1}} \cdots \frac{\delta \bar{x}^{i_m}}{\delta x^{l_m}} T^{l_1 \dots l_m}_{l_1 \dots l_n} \frac{\delta x^{l_1}}{\delta \bar{x}^{k_1}} \cdots \frac{\delta x^{l_n}}{\delta \bar{x}^{k_n}}.$$

Wir nennen die geometrischen Objekte, welche Elemente des zu $B^m_n$ linear homöomorphen Raumes $\mathfrak{T}^m_n(P)$ sind, $m$-fach kontravariante, $n$-fach kovariante Tensoren. Die Räume $\mathfrak{T}^m_n(P)$ bezeichnen wir als Tangentialräume höherer Ordnung.

Im Endlichdimensionalen pflegt man der entsprechenden Definition des Tensors eine zweite zur Seite zu stellen, bei der die Komponenten eines Tensors als Koeffizienten einer invarianten Multilinearform aufgefaßt werden. Bei der entsprechenden Definition müssen wir hier die bei der Einführung von $B^m_n$ gemachte Einschränkung beachten.

Definition 2. Eine invariante Multilinearform in kontravarianten und kovarianten Vektoren, welche durch ein Element eines höheren adjungierten Raumes gegeben ist, stellt einen Tensor dar.

Hilfssatz 6.1. *Definition 1 und Definition 2 sind äquivalent.*

Daß die zweite Definition aus der ersten folgt, ergibt sich durch Einsetzen der Transformationsformeln.

Der Beweis für die Umkehrung mag am Beispiel $T^{ij}_k$ durchgeführt werden:

$$\xi_i \eta_j T^{ij}_k \varrho^k = \xi_i \eta_j \frac{\delta \bar{x}^i}{\delta x^r} \frac{\delta \bar{x}^j}{\delta x^s} \bar{T}^{rs}_t \frac{\delta x^t}{\delta \bar{x}^k} \varrho^k.$$

Dies gilt für alle $\xi, \eta, \varrho$ aus $B$ bzw. $B_1$, denn es treten in jedem Koordinatensystem alle Elemente von $B$ bzw. $B_1$ als Koordinatendarstellungen kontravarianter bzw. kovarianter Vektoren auf. Daraus ergibt sich nach der Definition der Gleichheit in Räumen $B^m_n$ (§ 2) die Behauptung.

Definition 2 ermöglicht die übliche einfache Einführung der tensoriellen Operationen.

Da die Räume $\mathfrak{T}^m_n(P)$ zu $B^m_n$ linear homöomorph sind, sind Addition von Tensoren gleicher Stufenzahlen und Multiplikation mit Skalarfaktoren erklärt; diese Einführung ist gleichbedeutend mit der Erklärung dieser Operationen durch Ausführung der entsprechenden Operationen an den invarianten Multilinearformen.

Die Multiplikation von Tensoren beliebigen (auch verschiedenen) Charakters wird durch die Multiplikation der entsprechenden invarianten Multilinearformen erklärt. Die Normen der Koordinatendarstellungen multiplizieren sich dabei ebenfalls, denn:

$$||T_k^i S_r^{jl}|| = \sup \frac{|\eta_i T_k^i \xi^k x_j y_l S_r^{jl} z^r|}{||\eta|| \cdot ||\xi|| \cdot ||x|| \cdot ||y|| \cdot ||z||}$$

$$= \sup \frac{|\eta_i T_k^i \xi^k|}{||\eta|| \cdot ||\xi||} \cdot \sup \frac{|x_j y_l S_r^{jl} z^r|}{||x|| \cdot ||y|| \cdot ||z||} = ||T_k^i|| \cdot ||S_r^{jl}||.$$

Die Überschiebung von $T_{k_1 \dots k_\nu \dots k_n}^{i_1 \dots i_m}$ und $S_{j_1 \dots j_s}^{l_1 \dots l_\varrho \dots l_r}$ wird erklärt durch:

$$T_{k_1 \dots k_\nu \dots k_m}^{i_1 \dots i_m} \xi^{k_\nu}, \qquad \xi^{k_\nu} = S_{j_1 \dots j_s}^{l_1 \dots k_\nu \dots l_r} \eta_{l_1} \dots \varrho_{l_r} y^{j_1} \dots z^{j_s}.$$

Dabei gilt für die Normen:

$$||T_{k_1 \dots k \dots k_n}^{i_1 \dots i_m} S_{j_1 \dots j_s}^{l_1 \dots k \dots l_r}|| \leq ||T_{\dots}^{\dots}|| \cdot ||S_{\dots}^{\dots}||.$$

Eine Erklärung der Verjüngung von Tensoren ist im allgemeinen nicht möglich; denn jedenfalls müßte man von ihr (wie von allen anderen Begriffsbildungen) verlangen, daß sie im Endlichdimensionalen in das Übliche übergeht. Dort ergibt aber $\delta_i^i$ die Dimensionszahl des Raumes, und beim dimensionsfreien Aufbau muß man daher auf die Erklärung der Verjüngung in dieser Allgemeinheit verzichten. Doch ist eine Verjüngung immer dann möglich, wenn ein Tensor das Produkt zweier Tensoren niedrigerer Stufenzahl ist, von denen mindestens einer einen oberen, der andere einen unteren Index trägt:

$$T_k^{ik} = t_k^i \xi^k \quad \text{wenn} \quad T^{ik} = t_j^i \xi^k.$$

Die Verjüngung ist in diesem Falle keine neue Operation, sondern bedeutet einen Übergang von der tensoriellen Multiplikation zur Überschiebung.

Diese Einschränkung der Verjüngung auf spezielle Fälle ist ein Beispiel dafür, daß der dimensionsfreie Aufbau der Geometrie einen Verlust an Invarianten bedingt. Ein weiteres Beispiel ist die Tensordichte, die wegen des Fehlens einer Determinante nicht erklärbar sein wird. Auch der im Endlichdimensionalen oft verwendete $\varepsilon$-Tensor ist nicht erklärbar, da die Zahl seiner Indizes mit der Dimensionszahl zusammenhängt.

Wir betrachten nun noch Tensorfelder und ihre Differentiation. Ein Tensorfeld ist dargestellt durch eine Abbildung einer offenen Menge aus $B$ (den Koordinaten einer offenen Menge $V_j$ des Raumes) in den BANACH-Raum $B_n^m$. Tensorfelder fallen also unter die in § 4 behandelten Abbildungen, und der Begriff der Differenzierbarkeit hat für sie einen Sinn. Wir schreiben

$$\frac{\delta T_{\dots}^{\dots}}{\delta x^j} = T_{\dots,j}^{\dots},$$

da diese Ableitung in $B_{n+1}^m$ liegt, wenn sie auch im allgemeinen keinen Tensor darstellt. Letzteres gilt aber für $\varphi_{,i}$, den Gradienten einer Invariante $\varphi$, da $\delta\varphi = \varphi_{,i}\, \delta x^i$ eine invariante Linearform im kontravarianten Vektor $\delta x^i$ ist.

Die bei uns vorgenommene Einführung des Tensorbegriffs ist wesentlich verschieden von der MICHALschen Definition (z. B. [4, 546—547]). MICHAL postuliert die Existenz eines von der Norm unabhängigen Skalarproduktes $[\xi, \eta]$ in $B$. (Daß es solche Skalarprodukte wirklich immer gibt, ist in NT, Satz 2 enthalten.) Kontravariante Vektoren werden bei MICHAL wie üblich definiert, kovariante Vektoren sind Elemente von $B$ mit einem Transformationsgesetz, welches zu dem der kontravarianten Vektoren bezüglich $[.,.]$ adjungiert ist. Da die Ableitungen von Skalarfeldern im allgemeinen lineare Funktionale sind, und da sich $B_1$ im allgemeinen nicht isomorph auf $B$ abbilden läßt, sind bei MICHAL die Gradienten invarianter Skalarfelder im allgemeinen keine kovarianten Vektorfelder. Außerdem kann MICHAL Tensoren höherer Stufe überhaupt nicht einführen. Auch KERNER [1] kann keine Tensoren von höherer als erster kontravarianter Stufenzahl erklären.

Unsere Einführung vermeidet diese Mängel, und durch Verwendung der in § 2 eingeführten Indizesschreibweise wird ein Vergleich mit der klassischen endlichdimensionalen Geometrie erleichtert.

## Literatur.

BANACH, S.: [1] Théorie des opérations linéaires. Warschau 1932. — BOURBAKI, N.: [1] Espaces vectoriels topologiques. Paris 1953. — [2] Topologie générale, Kap. IX. Paris 1948. — CLARKSON, J. A.: [1] Uniformly convex spaces. Trans. Amer. Math. Soc. **40**, 396—414 (1936). — DIRAC, P. A. M.: [1] Quantum mechanics, 3. Aufl. Oxford 1947. — FRÉCHET, M.: [1] La différentielle dans l'analyse générale. Ann. sci. Ecol. norm. sup. **42**, 293—323 (1925). — GREENWOOD, J. A.: [1] On the curvatures of certain curves in function space. Ann. of Math. (2) **36**, 157—166 (1935). — HAUSDORFF, F.: [1] Zur Theorie der linearen metrischen Räume. J. reine angew. Math. **167**, 294—311 (1932). — HILLE, E.: [1] Functional analysis and semi-groups. New York 1948. — KERNER, M.: [1] Abstract differential geometry. Compositio Math. **4**, 308—341 (1937). — [2] Die Differentiale in der allgemeinen Analysis. Ann. of Math. (2) **34**, 546—572 (1933). — [3] Gewöhnliche Differentialgleichungen der allgemeinen Analysis. Prace mat.-fiz. **40**, 47—67 (1932). — KOWALEWSKI, G.: [1] Sur les formules de Frenet dans l'espace fonctionel. C. R. Acad. Sci. Paris **151**, 1338—1340 (1910). — LAUGWITZ, D.: [NT] Über Normtopologien in linearen Räumen. Arch. Math. **4**, 455—460 (1953). — LÖWIG, H.: [1] Über die Dimension linearer Räume. Studia math. **5**, 18—23 (1934). — MACKEY, G.W.: [1] On infinite-dimensional linear spaces. Trans. Amer. Math. Soc. **57**, 155—207 (1945). — MICHAL, A. D.: [1] Affinely connected function space manifolds. Amer. J. Math. **50**, 473—517 (1928). — [2] Riemannian differential geometry in abstract spaces. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **21**, 526—529 (1935). — [3] Differential calculus in linear topological spaces. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **40**, 340—342 (1938). — [4] General differential geometries and related topics. Bull. Amer. Math. Soc. **45**, 529—563 (1939). Mit Bibliographie. — MOISIL, G. C.: [1] La mécanique analytique des systèmes continus. Diss. Bukarest 1929. — SOBCZYK, A.: [1] Projections in Minkowski and Banach spaces. Duke Math. J. **8**, 78—106 (1941). — VITALI, G.: [1] Geometria nello spazio hilbertiano. Bologna 1929. — WEYL, H.: [1] Raum-Zeit-Materie, 3. Aufl. Berlin 1919.

*Göttingen, Nußanger 70.*

*(Eingegangen am 22. Juni 1954.)*

MAY CIRCULATE

# Siebenstellige Tafeln der elementaren transzendenten Funktionen

Von

Dr. **Friedrich Lösch**

Professor an der Technischen Hochschule Stuttgart

VIII, 335 Seiten $4^0$. 1954. Ganzleinen DM 49.80

Inhaltsübersicht: Einleitung. — Neunstellige Werte der elementaren transzendenten Funktionen für $x = 0\ (0{,}0001)\ 0{,}1$. — Siebenstellige Werte der elementaren transzendenten Funktionen für $x = 0{,}1\ (0{,}0005)\ 3{,}15$; $x = 3\ (0{,}01)\ 10$; $x = 10\ (0{,}1)\ 20$; Werte von $\operatorname{tg} x$ für $x \approx \frac{\pi}{2}$; Werte von $\operatorname{Ar\,Tg}\, x$ und $\operatorname{Ar\,Ctg}\, x$ für $x \approx 1$. — Siebenstellige Werte elementarer Funktionen für $x = 0\ (1)\ 100$. — Zwölfstellige Werte von $\frac{\pi}{2} n$ für $n = 0\ (1)\ 100$. — Siebenstellige Werte der Funktionen $\sin \frac{\pi}{2} x$, $\cos \frac{\pi}{2} x$ für $x = 0\ (0{,}001)\ 0{,}5$. — Siebenstellige Werte der Funktionen $e^{\frac{\pi}{2} x}$, $e^{-\frac{\pi}{2} x}$, $\operatorname{Sin} \frac{\pi}{2} x$, $\operatorname{Cof} \frac{\pi}{2} x$ für $x = 0\ (0{,}01)\ 2$. — Siebenstellige Werte der Funktionen $e^{\frac{\pi x}{180}}$, $e^{-\frac{\pi x}{180}}$, $\operatorname{Sin} \frac{\pi x}{180}$, $\operatorname{Cof} \frac{\pi x}{180}$ für $x = 0\ (1)\ 180$. — Umwandlung von Bogenmaß ($x$) in Gradmaß ($\varphi$). — Umwandlung von Gradmaß ($\varphi$) n Bogenma ß ($x$). — Einige oft gebrauchte Zahlenwerte.

Aus dem Vorwort:

In den letzten zwei Jahrzehnten sind, vor allem im Rahmen des „Applied Mathematics Programm of the National Bureau of Standards", ausführliche Tafeln für fast alle elementaren transzendenten Funktionen erschienen. Es fehlt jedoch, seit die von K. HAYASHI im Jahre 1926 herausgegebenen Tafeln vergriffen sind, ein zusammenfassendes mehrstelliges Werk über diese Funktionen. Die vorliegenden Tafeln sollen zur Ausfüllung dieser Lücke beitragen.

Entsprechend der Zielsetzung schließen sie sich in ihrer Grundanlage notwendig an die genannten HAYASHIschen Tafeln an. Das Bestreben, ein für viele Rechnungen ausreichendes, nicht zu umfangreiches und dabei bequem benutzbares Tafelwerk zu geben, führte jedoch im einzelnen zu wesentlichen Abweichungen. Einerseits wurde die Stellenzahl der Tafelwerte fast durchweg auf 7 Dezimalen beschränkt. Andrerseits wurde der Tafelschritt so weit verkleinert, daß bei einem zulässigen Fehler von 1 bis 2 Einheiten der letzten Stelle im Hauptintervall fast durchweg lineare Interpolation möglich ist. Zur Erleichterung der Interpolation wurden die ersten Differenzen beigegeben.

Ein großer Teil der Tafeln ist vollständig neu berechnet worden. Bei dem restlichen Teil wurde von den vorhandenen Quellen ausgegangen und soweit nötig eine Ergänzung der damit gegebenen Werte durch Interpolation vorgenommen. In jedem Falle wurden die auf 9 bis 10 Dezimalen ermittelten Funktionswerte durch Differenzenbildung kontrolliert. Die Abrundung auf 7 bzw. 9 Dezimalen wurde in der üblichen Weise vorgenommen. In Zweifelsfällen wurde die letzte Dezimale durch direkte Berechnung des betreffenden Wertes auf die erforderliche Stellenzahl ermittelt.

**SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG**

FILED IN STACKS




# Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften

**in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete.** Herausgegeben von **R. Grammel, E. Hopf, H. Hopf, F. Rellich, F. K. Schmidt, B. L. van der Waerden.**

Band X:

## Ricci Calculus

An Introduction to Tensor Analysis and Its Geometrical Applications. By **J. A. Schouten,** Emeritus Professor of Mathematics in The University of Amsterdam, Director of The Mathematical Centre at Amsterdam. Second Edition. Mit 16 Abbildungen. XX, 516 Seiten Gr.-8°. 1954. DM 55.—; Ganzleinen DM 58.60

This is an entirely new book. The first edition appeared in 1923 and at that time it was up to date. But in 1935 and 1938 the author and Prof. D. J. STRUIK published a new book, their Einführung I and II, and this book not only gave the first systematic introduction to the kernel-index method but also contained many notions that had come into prominence since 1923. For instance densities, quantities of the second kind, pseudo-quantities, normal coordinates, the symbolism of exterior forms, the LIE derivative, the theory of variation and deformation and the theory of subprojective connexions were included. Now since 1938 there have been many new developments and so a book on RICCI calculus and its applications has to cover quite different ground from the book of 1923. Though the purpose remains to make the reader acquainted with RICCI's famous instrument in its modern form, the book must have quite a different methodical structure and quite different applications have to be chosen.
In the first edition there was an extensive literature list. With its 196 titles it covered nearly all the literature on many dimensional differential geometry. The literature list of the Einführung of 1935—1938 with its 488 titles represents only a selection of the literature at that time. This is even more true of the literature list presented here which is by no means exhaustive though it contains about 1400 titles and refers to about 350 authors. By selecting the titles in such a way that the reader interested in some topic will always find at least a few titles that can lead him to more references, the author has tried to retain something of the encyclopedic character of the first edition.

MAY CIRCULATE

Band LXXII:

## Grundlagen der analytischen Topologie

Von **Georg Nöbeling,** o. Professor der Mathematik an der Universität Erlangen. X, 221 Seiten Gr.-8°. 1954. DM 33.—; Ganzleinen DM 36.60

Inhaltsübersicht: Einleitung. — **I. Vorbereitungen:** Vereine und Verbände. Untervereine und Unterverbände. Homomorphismen und Isomorphismen. Raster, Filter und Ideale. Darstellungs- und Erweiterungssätze. Produktvereine und Produktverbände. — **II. Topologische Strukturen:** Grundbegriffe (Topologische Vereine. Topologische BOOLE-Verbände. Topologische Räume. Quasi-metrische und metrische Räume). Adhärenz und Häufung (Gefilterte Funktionen. Adhärente Somen, limes superior und limes inferior einer gefilterten Somenfamilie. Adhärente Somen eines Rasters. Konvergente Raster. Häufungssomen und Derivierte eines Somas). Topologie von Untervereinen. Stetige Homomorphismen. Homöomorphien. Trennungsaxiome ($T_1$-topologische BOOLE-Verbände. Separierte, reguläre, normale und vollständig normale topologische BOOLE-Verbände. Vollständig reguläre, topologische BOOLE-Verbände). m-Kompaktheit und Vollkompaktheit. Dichtigkeit. Zusammenhang. Ableitung nach einem Filter oder einem Ideal. Topologische Restklassenvereine. Topologische Produktverbände (Topologische BOOLEsche Produktverbände. Topologische CARTESIsche Produkträume). Darstellungs- und Erweiterungssätze (Darstellung topologischer Vereine als Untervereine topologischer Räume. Erweiterung von $T_1$-Räumen zu vollkompakten $T_1$-Räumen). — **III. Uniforme Strukturen:** Uniforme BOOLE-Verbände. Reell-uniforme BOOLE-Verbände. Uniforme Räume. Gleichmäßig stetige Homomorphismen. Uniforme Konvergenz. Uniforme Struktur und Trennungsaxiome. Uniformierbare BOOLE-Verbände. Vollständige uniforme BOOLE-Verbände. Darstellungs- und Erweiterungssätze. — Anhang. — Bibliographie. — Sachverzeichnis.

**SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG**


Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg. — Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG., Würzburg.
Printed in Germany.